数　　学

注　　意

1　問題は $\boxed{1}$ から $\boxed{4}$ までで，７ページにわたって印刷してあります。

2　検査時間は 50 分で，終わりは**午前 11 時 00 分**です。

3　声を出して読んではいけません。

4　解答は全て解答用紙に明確に記入し，**解答用紙だけを提出しなさい。**

5　答えに根号が含まれるときは，**根号を付けたまま，分母に根号を含まない形で表しなさい。**また，根号の中は最も小さい整数にしなさい。

6　解答を直すときは，きれいに消してから，新しい解答を書きなさい。

7　**受検番号**を解答用紙の決められた欄に記入しなさい。

1 次の各問に答えよ。

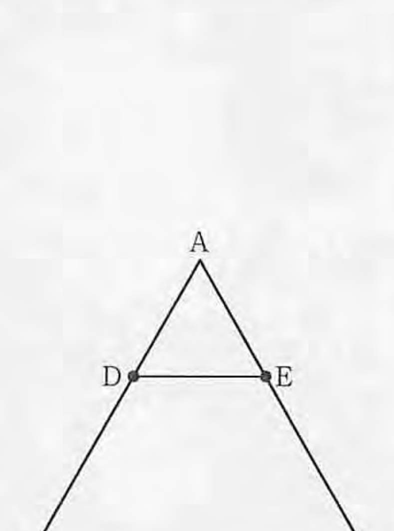
〔問 1〕 $\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{\sqrt{6}-3\sqrt{3}}{\sqrt{12}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+2$ を計算せよ。

〔問 2〕 2 次方程式 $(x-2)^2+2x(x+1)=12$ を解け。

〔問 3〕 2020 に 300 以下の 3 桁の自然数 n を加えた数は，123 で割り切れた。n の値を求めよ。

〔問 4〕 1 から 6 までの目が出る大小 2 つのさいころを同時に投げる。
大きいさいころの出た目を a，小さいさいころの出た目を b とするとき，直線 $y=3ax$ と直線 $y=2bx+1$ が交わる確率を求めよ。
ただし，大小 2 つのさいころはともに，1 から 6 までのどの目が出ることも同様に確からしいものとする。

〔問 5〕 右の図で，△ABC と △ADE は正三角形である。
点 D は辺 AB 上の点，点 E は辺 AC 上の点である。
解答欄に示した図をもとにして，
△ABC の半分の面積となるように，
△ADE を定規とコンパスを用いて作図せよ。
また，2 点 D，E の位置を示す文字 D，E も書け。
ただし，作図に用いた線は消さないでおくこと。



2 右の**図1**で，点Oは原点，曲線fは関数$y=ax^2$ $(a>0)$ のグラフを表している。

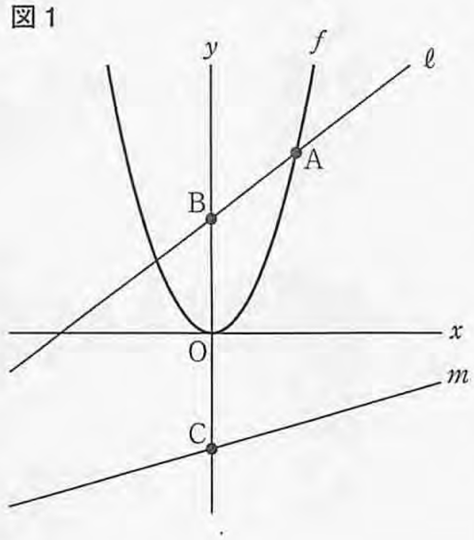
曲線f上にあり，x座標が正の数である点をA，y軸上にある2点をB，Cとし，Bのy座標を4，Cのy座標を-4とする。

また，2点A，Bを通る直線をℓ，点Cを通る直線をmとする。

ただし，原点から点 (1, 0) までの距離，および原点から点 (0, 1) までの距離をそれぞれ1 cmとする。

次の各問に答えよ。

図1



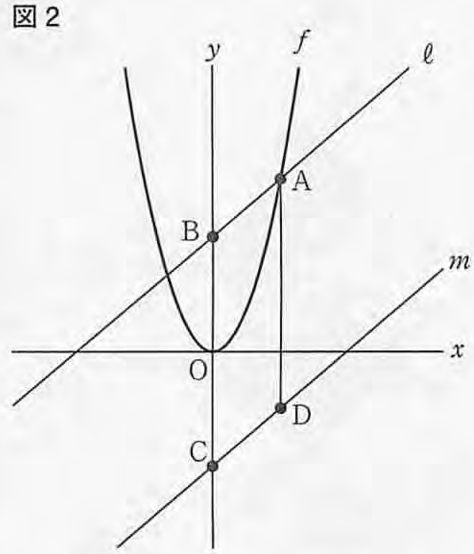
〔問1〕 右の**図2**は，**図1**において，2つの直線ℓ，mが平行である場合を表している。

点Dは，直線m上にあり，点Dのx座標は点Aのx座標に等しい。

点Aと点Dを結ぶ。

次の (1)，(2) に答えよ。

図2



(1) $a=3$で，四角形ABCDの面積が$\frac{32}{3}$ cm^{2}のとき，点Dの座標を求めよ。

(2) 直線ℓの傾きを2とする。

四角形ABCDがひし形になるとき，aの値を求めよ。

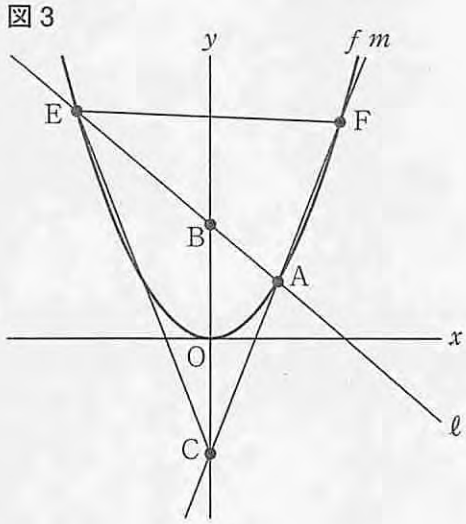
ただし，答えだけでなく，答えを求める過程が分かるように，途中の式や計算なども書け。

〔問２〕　右の**図３**は，**図１**において，直線 ℓ と曲線 f の交点のうち，点Ａと異なる点をＥとし，直線 m が点Ａを通るとき，直線 m と曲線 f の交点のうち，点Ａと異なる点をＦとした場合を表している。

点Ｃと点Ｅ，点Ｅと点Ｆをそれぞれ結ぶ。

点Ａの座標を（2，2）とするとき，△CEF の面積は △ABC の面積の何倍か。

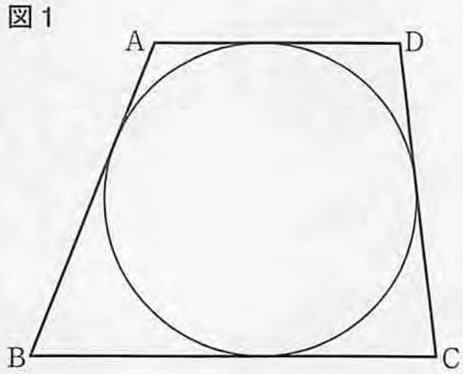
図３



3 右の**図１**で，四角形 ABCD は，AD // BC，AD ＜ BC で，∠ABC ＜∠BCD の台形を表し，円は辺 AB，辺 BC，辺 CD，辺 AD で四角形 ABCD と接している。

次の各問に答えよ。

図１



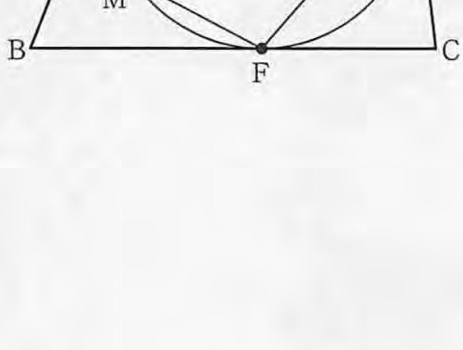
〔問１〕　**図１**において，円の半径が 1 cm，四角形 ABCD の面積が $8\ \mathrm{cm}^2$ であるとき，四角形 ABCD の周の長さ AB＋BC＋CD＋DA は何 cm か。

〔問２〕　右の**図２**は，**図１**において，辺 AB と円が接する点，辺 BC と円が接する点，辺 CD と円が接する点をそれぞれ E，F，G とし，点 G を含まない $\overset{\frown}{\mathrm{EF}}$ の長さを２等分する点を M とした場合を表している。

点 F と点 G，点 F と点 M，点 G と点 M をそれぞれ結ぶ。

$\angle \mathrm{DAB} = a^\circ$ とするとき，$\angle \mathrm{FGM}$ の大きさを a を用いた式で表せ。

図２

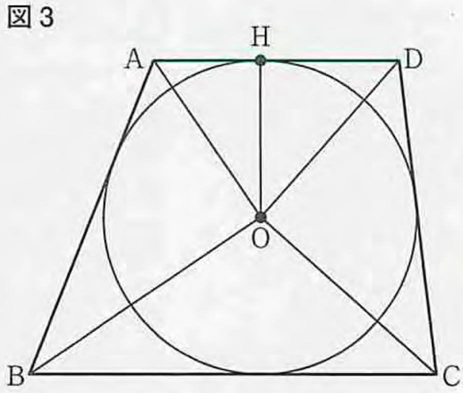


〔問3〕　右の図3は，図1において，円の中心を点Oとし，辺ADと円が接する点をHとした場合を表している。

点Oと頂点A，点Oと頂点B，点Oと頂点C，点Oと頂点D，点Oと点Hをそれぞれ結ぶ。

6つの三角形△OAB，△OBC，△ODC，△ODA，△HAO，△HDOの中から相似な三角形を1組選び，相似であることを証明せよ。

図3

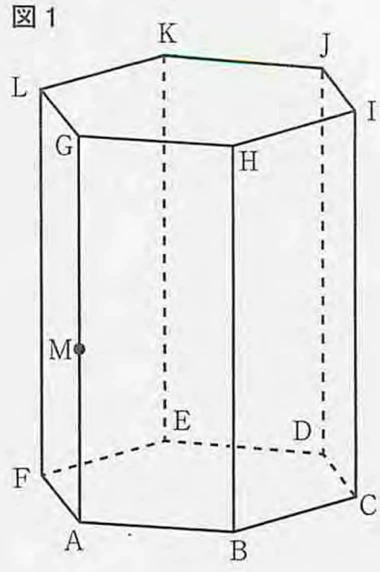


4 右の**図１**に示した立体 ABCDEF－GHIJKL は，底面が１辺２ cm の正六角形，高さが８ cm，６つの側面が全て合同な長方形の正六角柱である。

辺 AG 上の点を M とする。

次の各問に答えよ。

図１

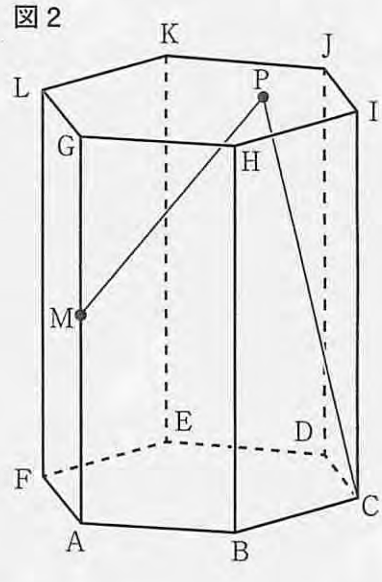


〔問１〕 右の**図２**は，**図１**において，面 GHIJKL 上に点 P をとり，点 M が辺 AG の中点である場合を表している。

点 P と頂点 C，点 P と点 M をそれぞれ結び，PC＋PM＝ ℓ cm とする。

ℓ の値が最も小さくなる場合の ℓ は何 cm か。

図２



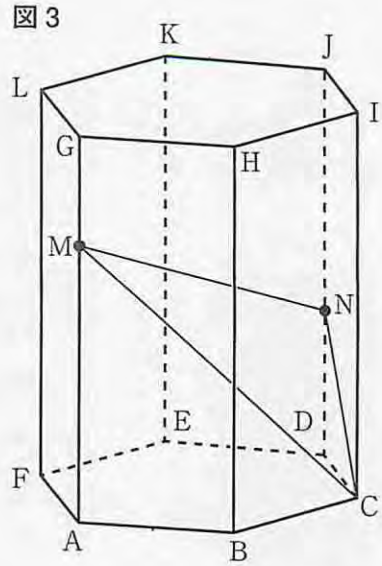
〔問2〕 AM = 6 cm のとき，次の (1)，(2) に答えよ。

(1) 右の**図3**は，**図1**において，辺 DJ 上に DN ≦ 6 となるように点 N をとり，頂点 C と点 M，頂点 C と点 N，点 M と点 N をそれぞれ結んだ場合を表している。

△CMN が MN = CN の二等辺三角形であるとき，△CMN の面積は何 cm^2 か。

ただし，答えだけでなく，答えを求める過程が分かるように，途中の式や計算なども書け。

図3

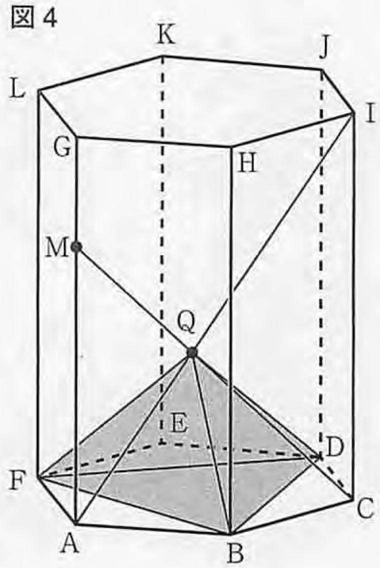


(2) 右の**図4**は，**図1**において，頂点 C と点 M，頂点 A と頂点 I をそれぞれ結んだ場合を表している。

線分 CM と線分 AI の交点を Q とする。

点 Q と頂点 B，点 Q と頂点 D，点 Q と頂点 F，頂点 B と頂点 D，頂点 B と頂点 F，頂点 D と頂点 F をそれぞれ結んでできる立体 Q − BDF の体積は何 cm^3 か。

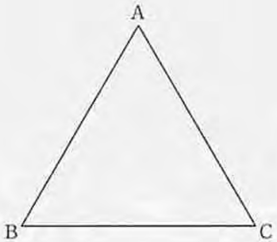
図4



解答用紙　数学

1

		点
〔問1〕		
〔問2〕		
〔問3〕	$n =$	
〔問4〕		
〔問5〕		



2

			点
〔問1〕	(1)	(,)	
	(2)	【 途中の式や計算など 】	

（答え）　$a =$

		点
〔問2〕	倍	

3

		点
〔問1〕	cm	
〔問2〕	度	
〔問3〕	【 選んだ1組の三角形 】	

【 相似であることの証明 】

4

			点
〔問1〕	$\ell =$		
〔問2〕	(1)	【 途中の式や計算など 】	

（答え）　cm^2

			点
〔問2〕	(2)	cm^3	

小計1	小計2	小計3	小計4

受検番号	合計得点

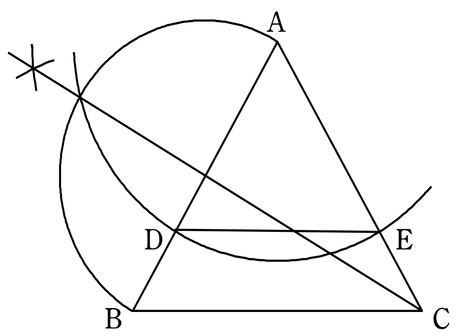
※ ▭ の欄には，記入しないこと

正　答　表　　　数　　学

1

		点
〔問1〕	0	5
〔問2〕	$x=2,\ -\dfrac{4}{3}$	5
〔問3〕	$n=194$	5
〔問4〕	$\dfrac{17}{18}$	5
〔問5〕		5

〔解答例〕



2

			点
〔問1〕	(1)	$\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{8}{3}\right)$	7
	(2)	【　途中の式や計算など　】	10

〔解答例〕

点Bを通り x 軸に平行な直線を引き，直線ADとの交点をHとする。

四角形ABCDがひし形になるとき，

$AB=BC=8$

直線 ℓ の傾きが2であるから，$BH=t$ とおくと，

$AH=2t$

△ABHは ∠H＝90° の直角三角形だから，

三平方の定理より，

$t^2+(2t)^2=8^2$

整理して，

$5t^2=64$

$t>0$ より，$t=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

$AH=2\times\dfrac{8\sqrt{5}}{5}=\dfrac{16\sqrt{5}}{5}$

点Hの y 座標は4であるから，

$A\left(\dfrac{8\sqrt{5}}{5},\ 4+\dfrac{16\sqrt{5}}{5}\right)$

点Aは曲線 f 上にあるから，

$a\left(\dfrac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2=4+\dfrac{16\sqrt{5}}{5}=\dfrac{20+16\sqrt{5}}{5}$

よって，　$a=\dfrac{20+16\sqrt{5}}{64}=\dfrac{5+4\sqrt{5}}{16}$

（答え）　$a=\dfrac{5+4\sqrt{5}}{16}$

		点
〔問2〕	6　倍	8

3

		点
〔問1〕	16　cm	7
〔問2〕	$\dfrac{a}{4}$　度	8
〔問3〕	【　選んだ1組の三角形　】 △OABと△HAO	10

【　相似であることの証明　】

〔解答例〕

辺ABと円の接点をEとする。

辺AB，辺ADは円に接するので，

∠OHA＝∠OEA＝90° …①

円の半径なので，OH＝OE

点Oは辺AB，辺ADから等距離にあるので，

線分OAは∠BADの二等分線である。

したがって，∠OAB＝∠OAD＝∠HAO …②

同様にして，線分OBは∠ABC の二等分線なので，

∠OBA＝∠OBC …③

四角形ABCDは台形なので，

∠DAB＋∠ABC＝180°

ここで，②，③より，

∠DAB＝∠OAD＋∠OAB＝2×∠OAB

∠ABC＝∠OBA＋∠OBC＝2×∠OBA

となるので，　∠OAB＋∠OBA＝90°

したがって，

∠BOA＝180°−(∠OAB＋∠OBA)

＝180°−90°＝90° …④

となり，①，④より，

∠BOA＝∠OHA …⑤

よって，△OABと△HAOにおいて，②，⑤より，

対応する2組の角の大きさがそれぞれ等しいので，

△OAB∽△HAO　　㊣

※ △ODC と △HDO についても同様に証明できる。

4

			点
〔問1〕		$\ell=2\sqrt{39}$	7
〔問2〕	(1)	【　途中の式や計算など　】	10

〔解答例〕

DN＝x とおく。

△CDNは，∠D＝90° の直角三角形だから，

三平方の定理より，

$CN^2=x^2+2^2=x^2+4$ …①

点Nから辺AGに垂線NSを下ろすと，

AS＝DN より，　$MS=x-6$

△MNSは，∠S＝90° の直角三角形だから，

三平方の定理より，

$MN^2=(6-x)^2+4^2=x^2-12x+52$ …②

$MN^2=CN^2$ であるから，　①，②より，

$x^2-12x+52=x^2+4$

これを解いて，　$x=4$

$MN=CN=2\sqrt{5}$ …③

△ACMは，∠A＝90° の直角三角形だから，

三平方の定理より，

$CM^2=(2\sqrt{3})^2+6^2=48$

$CM>0$ より，　$CM=4\sqrt{3}$ …④

③，④より，

△CMNは，　$CM=4\sqrt{3}$，$MN=CN=2\sqrt{5}$

の二等辺三角形である。

△CMNの頂点Nから辺CMに垂線NTを下ろすと，

Tは線分CMの中点であり，∠CTN=90° であるから，

△CNTにおいて三平方の定理より，

$NT^2=(2\sqrt{5})^2-(2\sqrt{3})^2=8$

$NT>0$ より，　$NT=2\sqrt{2}$

よって，△CMNの面積は，

$\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times2\sqrt{2}=4\sqrt{6}\ (cm^2)$

（答え）　$4\sqrt{6}$　cm^2

			点
〔問2〕	(2)	$\dfrac{24\sqrt{3}}{7}$　cm^3	8

小計1	小計2	小計3	小計4	受　検　番　号	合　計　得　点

※ ▢ の欄には，記入しないこと