2－西　数　学

数　　学

注　　意

1　問題は $\boxed{1}$ から $\boxed{4}$ までで，7 ページにわたって印刷してあります。
　また，解答用紙は両面に印刷してあります。

2　検査時間は 50 分で，終わりは**午前 11 時 00 分**です。

3　声を出して読んではいけません。

4　答えは全て解答用紙に**ＨＢ又はＢの鉛筆（シャープペンシルも可）**を使って明確に記入し，**解答用紙だけを提出しなさい**。

5　答えに根号が含まれるときは，**根号を付けたまま，分母に根号を含まない形で表しなさい**。また，**根号の中を最も小さい自然数にしなさい**。

6　答えは解答用紙の決められた欄から**はみ出さないように書きなさい**。

7　答えを直すときは，きれいに消してから，消しくずを残さないようにして，新しい答えを書きなさい。

8　**受検番号**を解答用紙の表面と裏面の決められた欄に書き，表面については，**その数字の　の中を正確に塗りつぶしなさい**。

9　解答用紙は，汚したり，折り曲げたりしてはいけません。

1 次の各問に答えよ。

〔問 1〕 $\dfrac{(\sqrt{10}-1)^2}{5}-\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{\sqrt{10}}$ を計算せよ。

〔問 2〕 2 次方程式 $3(x+3)^2-8(x+3)+2=0$ を解け。

〔問 3〕 右の**図 1** は正五角形 ABCDE で，点 P は頂点 A の位置にある。

1 から 6 までの目の出る大小 1 つずつのさいころを同時に 1 回投げる。

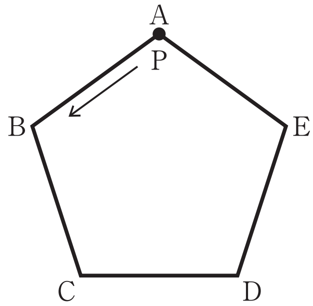
大きいさいころの出た目の数を a，小さいさいころの出た目の数を b とする。

点 P は，頂点 A を出発して，出た目の数の和 $a+b$ だけ正五角形の頂点上を反時計回り（矢印の方向）に移動する。例えば $a+b=6$ のとき，点 P は頂点 B の位置にある。

点 P が頂点 E の位置にある確率を求めよ。

ただし，大小 2 つのさいころはともに，1 から 6 までのどの目が出ることも同様に確からしいものとする。

図 1

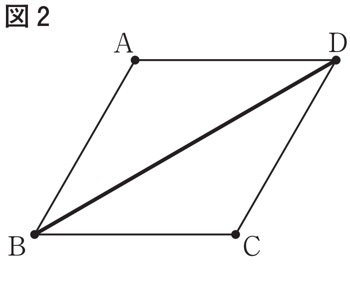


〔問 4〕 2 つの自然数 x，y は，$x^2-4y^2=13$ を満たしている。このとき，2 つの自然数 x，y の値をそれぞれ求めよ。

〔問 5〕 右の**図 2** で，四角形 ABCD は，$\angle ABC=60^\circ$ のひし形で，対角線 BD を引いたものである。

解答欄に示した図をもとにして，ひし形 ABCD を定規とコンパスを用いて作図し，頂点 A，頂点 C の位置を示す文字 A，C もそれぞれ書け。

図 2



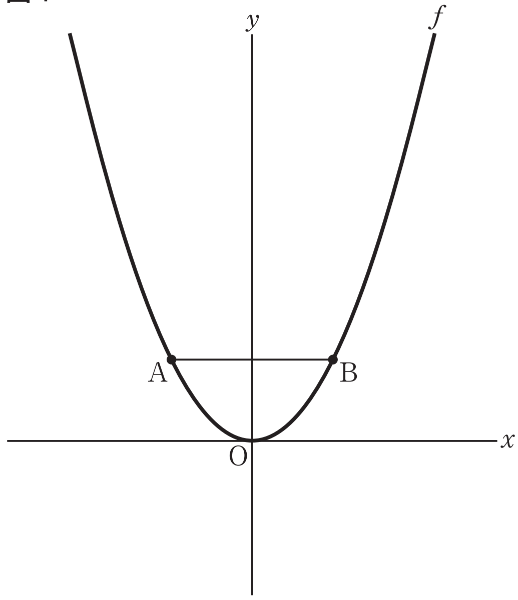
2 右の**図 1** で，点 O は原点，曲線 f は関数 $y = ax^2$（$a > 0$）のグラフである。

2 点 A，B はともに曲線 f 上にあり，点 A の x 座標は負の数，点 B の x 座標は正の数であり，点 A と点 B の x 座標の絶対値は等しい。

点 A と点 B を結ぶ。

点 O から点（1，0）までの距離，および点 O から点（0，1）までの距離をそれぞれ 1 cm として，次の各問に答えよ。

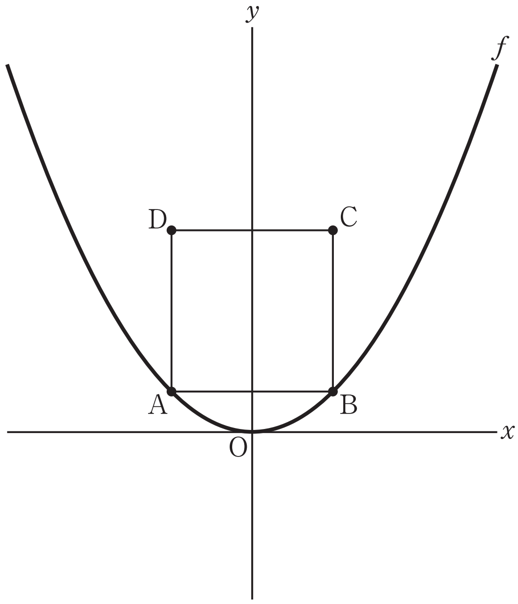
図 1



〔問 1〕 右の**図 2** は，**図 1** において，$a = \frac{1}{2}$，点 A の x 座標を -1 とし，四角形 ABCD が正方形となるように y 座標はともに正の数となる点 C と点 D をとり，点 B と点 C，点 C と点 D，点 D と点 A をそれぞれ結んだ場合を表している。

2 点 B，D を通る直線の式を求めよ。

図 2

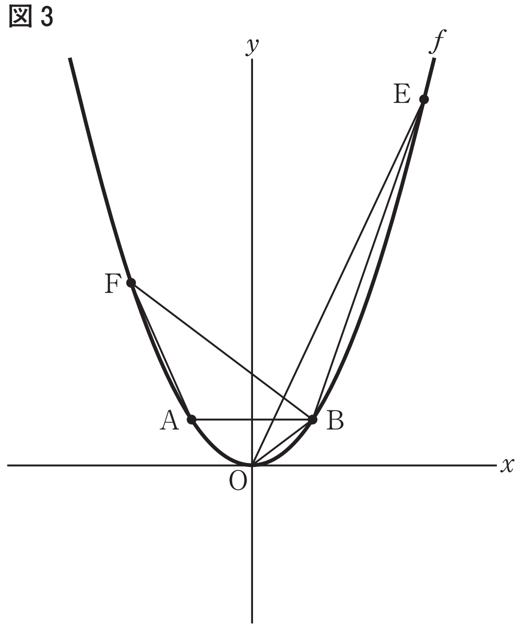


〔問 2〕　右の**図 3** は，**図 1** において，点 A の x 座標を -1 とし，点 E は曲線 f 上にあり，x 座標が 3 となる点とし，点 F は曲線 f 上にあり，x 座標が負の数で，y 座標が点 A の y 座標より大きい点とし，点 O と点 B，点 B と点 E，点 E と点 O，点 B と点 F，点 F と点 A をそれぞれ結んだ場合を表している。

△BEO と △ABF の面積が等しくなるとき，点 F の x 座標を求めよ。

ただし，答えだけでなく，答えを求める過程が分かるように，途中の式や計算なども書け。

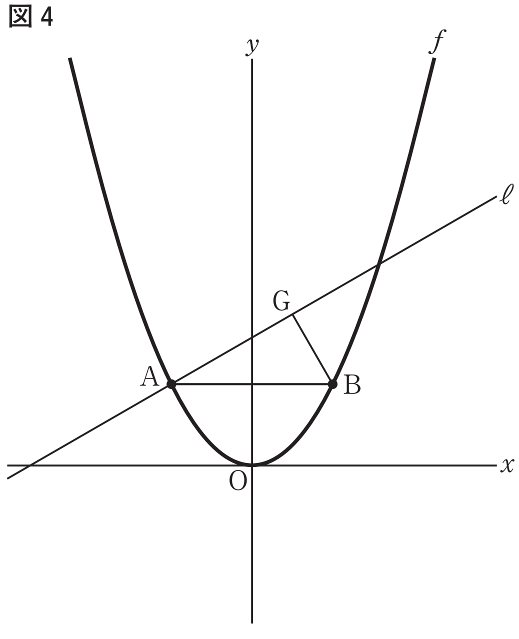
図 3



〔問 3〕　右の**図 4** は，**図 1** において，点 A を通り，傾きが曲線 f の式における比例定数 a と等しい直線を ℓ とし，点 B から直線 ℓ に引いた垂線と直線 ℓ との交点を G とし，点 B と点 G を結んだ場合を表している。

点 A の x 座標が $-\sqrt{7}$，△ABG の面積が 7 cm^2 のとき，a の値を求めよ。

図 4

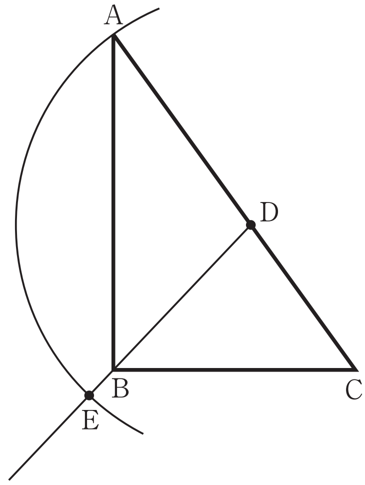


3　右の**図1**で，△ABCは，∠B＝90°の直角三角形で，辺AC上にあり頂点A，Cと異なる点をDとし，DA ≧ DBとする。点Dと頂点Bを結んだ線分を頂点Bの方向に伸ばした直線上にあり，DA＝DEとなる点をEとする。

点Dを中心とし，線分DAの長さを半径とする円D上の2点A，Eを結ぶ$\overset{\frown}{AE}$，線分DA，線分DEで囲まれた図形を，おうぎ形DAEとする。ただし，おうぎ形DAEの中心角は180°より小さいものとする。

次の各問に答えよ。

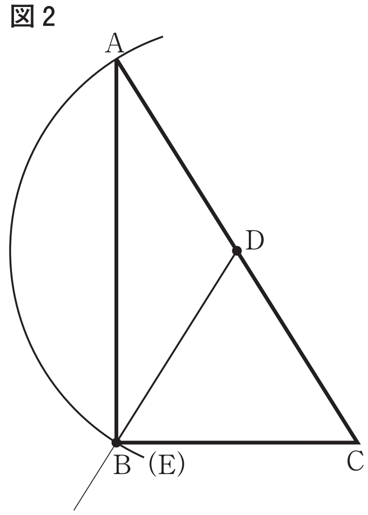
図1



〔問1〕　右の**図2**は，**図1**において，頂点Bと点Eが一致した場合を表している。

DA＝3cm，BC＝$2\sqrt{3}$cmのとき，△DBCの面積は何cm^2か。

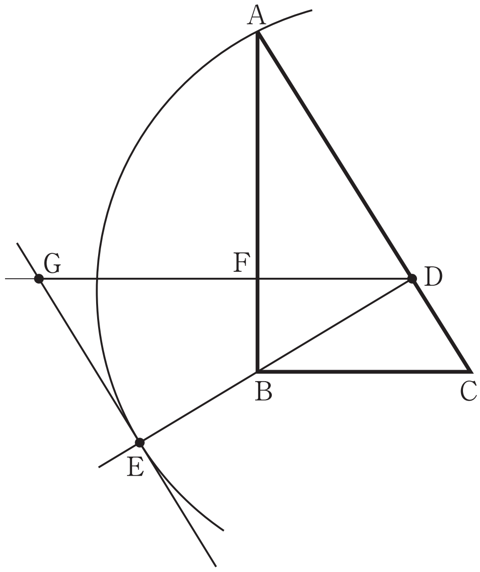
図2



〔問 2〕　右の**図 3** は，**図 1** において，点 D が $AD^2 + BD^2 = AB^2$ を満たし，点 D を通り，辺 AB に垂直な直線を引き，線分 AB との交点を F，直線 DF 上にある点を G とし，点 G と点 E を結んだ直線が円 D の点 E における接線となる場合を表している。

AB = DG であることを証明せよ。

図 3

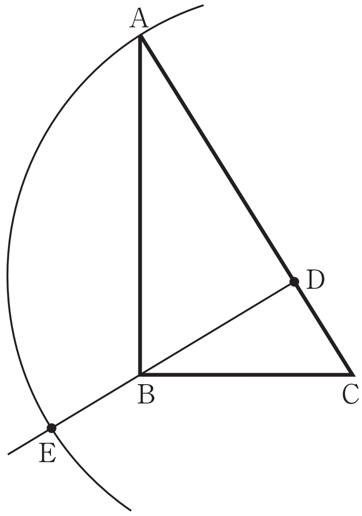


〔問 3〕　右の**図 4** は，**図 1** において，$\angle ADB = 90^\circ$ の場合を表している。

$AB = 4\sqrt{3}$ cm，CD = 2 cm のとき，おうぎ形 DAE の $\overset{\frown}{AE}$，線分 EB，線分 BC，線分 CA で囲まれた図形を，直線 AC を軸として 1 回転させたときにできる回転体の体積は何 cm^3 か。

ただし，円周率は π とする。

図 4



4 M さんが，自由研究で自然数の性質について図書館で調べたところ，本の中に，次のような**操作**で，自然数がどのように変わっていくかが書かれていた。

本の内容

操作
ある自然数 a が
① 偶数なら a を 2 で割る。
② 奇数なら a を 3 倍して 1 を加える。

自然数 a に**操作**を行い，得られた数を b とし，b に対して**操作**を行って c を得ることを自然数 a に 2 回の**操作**を行うとし， 3 回， 4 回， 5 回，… の**操作**は同様とする。

例えば， 7 に 3 回の**操作**を行うと　$7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34$　となる。

自然数 a が 10000 以下のとき，自然数 a に**操作**を繰り返し行うと必ず 1 になることは分かっている。

M さんは自然数 a が初めて 1 になるまでの**操作**の回数に興味を持った。そこで，自然数 a に**操作**を繰り返し行い，初めて 1 になるまでの**操作**の回数を $N(a)$ とし，$N(1) = 0$ とした。

例えば，10 に**操作**を繰り返し行うと， 6 回の**操作**で初めて 1 になるので，$N(10) = 6$ である。

次の各問に答えよ。

〔問 1〕　$N(6)$ を求めよ。

〔問 2〕　$N(168) - N(8 \times d) = 3$ を満たす自然数 d を求めよ。
ただし，答えだけでなく，答えを求める過程が分かるように，途中の式や計算なども書け。

Mさんは，**操作**の回数だけでなく，1になるまでの自然数の変化にも着目してみた。下の表は2020に**操作**を繰り返し行い，2020が1になるまでに現れたすべての自然数を2020も含めて左から小さい順に並べたとき，最初からx番目の自然数をyとして，xとyの関係を表したものである。ただし，e，f，gにはそれぞれある自然数があてはまり，表の中の $\cdots$ の部分は自然数が省略されている。

x	1	2	3	4	$\cdots$	$e-2$	$e-1$	e	$e+1$	$\cdots$	$N(2020)$	$N(2020)+1$
y	1	2	4	5	$\cdots$	172	f	g	344	$\cdots$	2020	2752

表のyの値の中央値は233.5で，fは2020から37回**操作**を行ったときに現れる自然数で，2020から38回**操作**を行ったときに現れる自然数は98であり，$N(2020)=53+N(160)$ が成り立つ。

〔問3〕　このとき自然数の組（e，g）を求めよ。

解 答 用 紙　数　学

＊受検番号欄は裏面にもあります。

(2-西)

受	検	番	号			
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9

マーク・解答上の注意事項

1　受検番号欄は、ＨＢ又はＢの鉛筆（シャープペンシルも可）を使って、◯ の中を正確に塗りつぶすこと。

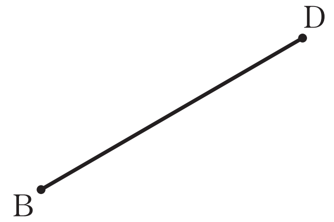
2　記入した内容を直すときは、きれいに消して、消しくずを残さないこと。

3　決められた欄以外にマークしたり、記入したりしないこと。

良い例	悪い例
●	線　小さい　はみ出し　丸囲み　レ点　うすい

1

〔問 1〕	
〔問 2〕	
〔問 3〕	
〔問 4〕	$x=$　　　，　$y=$
〔問 5〕	



2

〔問 1〕	$y=$
〔問 2〕	【　途中の式や計算など　】

（答え）

〔問 3〕	$a=$

解答用紙　**数　学**

受　検　番　号						

3

〔問 1〕　　cm^2

〔問 2〕　【　証　明　】

〔問 3〕　　cm^3

4

〔問 1〕

〔問 2〕　【　途中の式や計算など　】

（答え）　$d =$

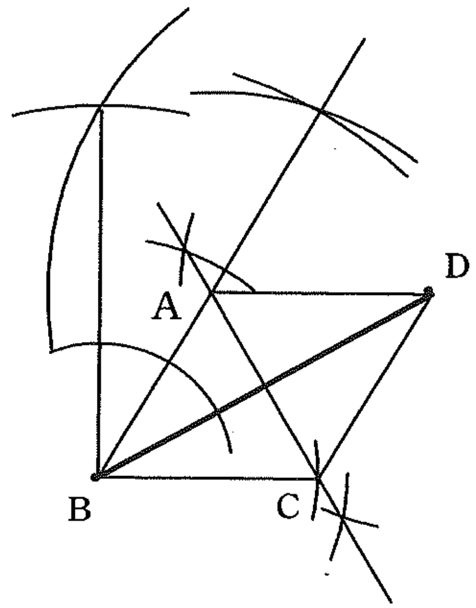
〔問 3〕　$(e, g) = ($　　　,　　　$)$

正答表

数　　学

1

1		点
〔問 1〕	$\frac{11}{5}$	5
〔問 2〕	$x=\frac{-5\pm\sqrt{10}}{3}$	5
〔問 3〕	$\frac{7}{36}$	5
〔問 4〕	$x=7\ ,y=3$	5
〔問 5〕 解答例		5



2

2		点
〔問 1〕	$y=-x+\frac{3}{2}$	7
〔問 2〕 解答例	【　途中の式や計算など　】	10

点Bの x 座標が1，点Eの x 座標が3なので，
点Bの座標は(1，a)，点 Eの座標は(3，$9a$)。
点Eから x 軸にひいた垂線と x 軸との交点をH
とすると，Hの座標は(3，0)となる。
したがって，
(△BEOの面積)＝(△OHEの面積)－(△OHB面積)
－(△BHEの面積)より
(△BEOの面積)＝$\frac{1}{2}\times3\times9a-\frac{1}{2}\times3\times a$
$-\frac{1}{2}\times9a\times2=3a$ cm^2
条件より，△ABFの面積も $3a$ cm^2 となる。…①
△ABFにおいて、辺ABの長さは2cmである。
よって，辺ABを底辺としたときの△ABFの
高さを h cmとおくと，①より $\frac{1}{2}\times2\times h=3a$
$h=3a$
よって，点Fの y 座標は $a+3a=4a$ となる。
点Fの x 座標を t とすると，点Fは曲線 $y=ax^2$
上の点なので，$4a=at^2$
$a\neq0$ より両辺を a で割ると，$4=t^2$
点Fの x 座標は負より，$t=-2$
点Fの x 座標は -2

（答え）　-2

〔問 3〕	$a=1$	8

3

3		点
〔問 1〕	$3\sqrt{2}$ cm^2	7
〔問 2〕 解答例	【　証　明　】	10

△ABDと△DGEにおいて，
仮定より DA＝ED ……①
AD^2＋BD^2＝AB^2 より，
三平方の定理の逆を用いて，
△ABDは辺ABを斜辺とする直角三角形である。
よって，∠ADB＝90° ……②
線分GEが，円Dの点Eにおける接線なので，
∠DEG＝90° …③
②，③より，∠ADB＝∠DEG＝90° ……④
∠AFD＝∠ABC＝90° より，FD // BC……⑤
⑤より，同位角は等しいので，
∠ACB＝∠ADF ……⑥
△ABCの内角の和と∠ABC＝90° より，
∠BAC＝180°－(90°＋∠ACB)
＝90°－∠ACB
∠BAD＝90°－∠ACB……⑦
②より，∠GDE＝90°－∠ADF ……⑧
⑥，⑦，⑧より，∠BAD＝∠GDE ……⑨
①，④，⑨より，
一組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，
△ABD≡△DGE
合同な図形の対応する辺の長さは等しいので，
AB＝DG
（証明終）

〔問 3〕	152π cm^3	8

4

4		点
〔問 1〕	8	7
〔問 2〕 解答例	【　途中の式や計算など　】	10

$8=2^3=2\times2\times2$ で
$2\times2\times2\to2\times2\to2\to1$ なので，
$N(8)=N(2^3)=3$ …①となる。
また $8\times d\to4\times d\to2\times d\to d\to\cdots\to1$ なので
$N(8\times d)=N(8)+N(d)$ …②となる。
①②より $N(8\times d)=3+N(d)$
①②と同様にして，
$N(168)=N(2^3\times21)=N(2^3)+N(21)=3+N(21)$
ここで，$21\to64\to\cdots1$ となるので
$N(21)=1+N(64)=1+N(2^6)$
ここで①と同様にして，$N(2^6)=6$ となる。
したがって，
$N(21)=1+6=7$
ゆえに，
$N(168)=3+7=10$
したがって，$N(168)-N(8\times d)=3$ は
$10-(3+N(d))=3$ となるので，
$N(d)=4$ …③
ここで自然数の変化を1から逆にたどっていくと，
$1\leftarrow2\leftarrow4\leftarrow8\leftarrow16$ または $1\leftarrow2\leftarrow4\leftarrow1\leftarrow2$
となり，初めて1になるまでの操作の回数を
$N(a)$ としたので，③を満たす自然数 d は
1個しかなく，$d=16$ である。

（答え）　$d=16$

〔問 3〕	$(e\ ,g)=(33\ ,271)$	8