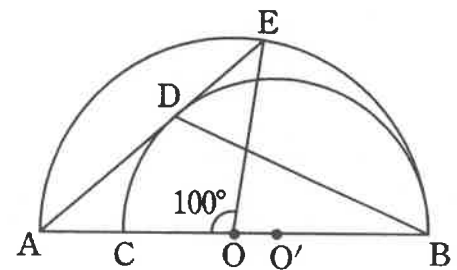


① 次の各問いに答えよ。

(1) 連立方程式 $\begin{cases} (x+3y):(4x-2y)=3:5 \\ 3x-5y=12 \end{cases}$ を解け。

(2) $a = \sqrt{3} + \sqrt{15}$, $b = \sqrt{3} - \sqrt{15}$ のとき, $\frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2}$ の値を求めよ。

(3) 図のように, 線分 AB, CB を直径とする大小2つの半円があり, 小さい方の半円に点 A から接線を引き, 2つの半円との接点と交点をそれぞれ D, E とする。2つの半円のそれぞれの中心を O, O' とする。
 $\angle AOE = 100^\circ$ であるとき, $\angle BDE$ の大きさを求めよ。



(4) $p+q=20$, $p>q>0$ を満たす異なる2つの正の整数 p, q の組は9組ある。
 この9組のうち, $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ の値が大きいほうから3番目となる組を求めよ。

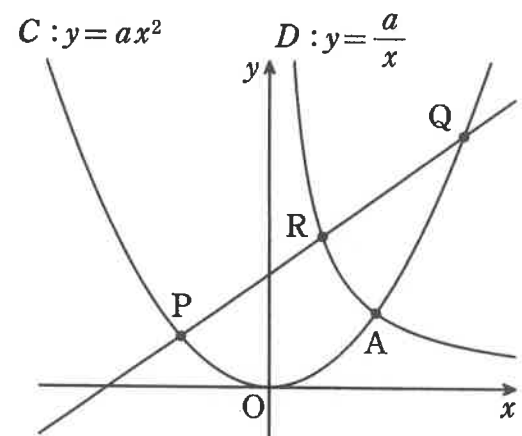
(5) $4m^3 + n^2 = 2020$ を満たす正の整数 m, n の組は2組ある。その2組を求めよ。

② a を正の定数とする。

放物線 $C: y = ax^2$ と反比例のグラフ $D: y = \frac{a}{x}$ ($x > 0$) の交点を A とする。右図のように C 上で A より左側に点 P , 右側に点 Q をとり, 直線 PQ と D の交点を R とする。点 P, Q の x 座標を p, q とする。

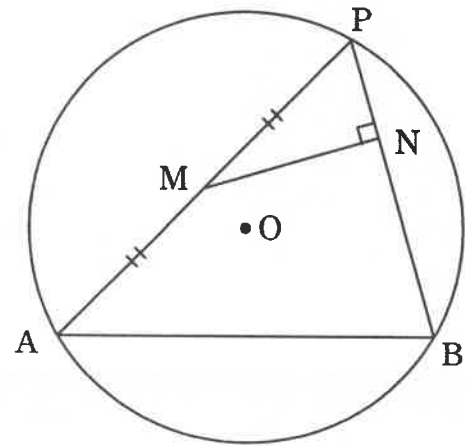
直線 PQ の傾きが C, D の比例定数 a と等しく, R が線分 PQ の中点となるとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 点 A の座標を a を用いて表せ。
- (2) $p+q$ の値を求めよ。
- (3) 点 R の座標を a を用いて表せ。
- (4) p, q の値をそれぞれ求めよ。
- (5) $AP=AQ$ となるとき, a の値を求めよ。

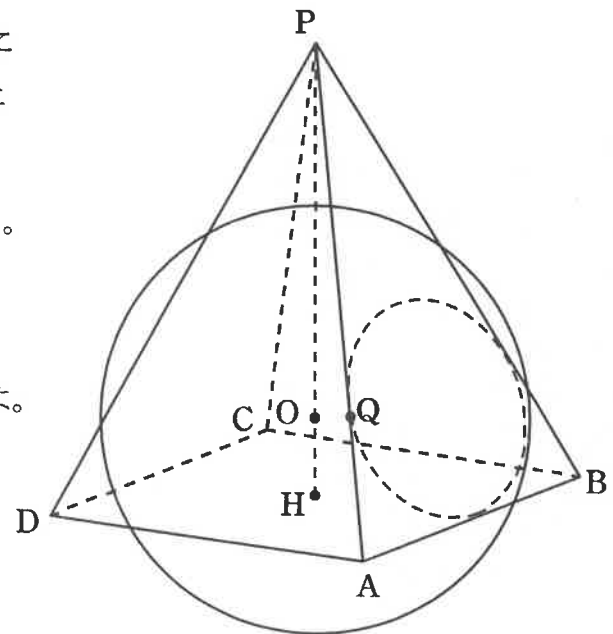


- ③ 1から6までのどの目が出ることも同様に確からしいさいころを3回投げ、出た目を順に a, b, c とし、直線 $y = ax + b \dots$ ① と放物線 $y = cx^2 \dots$ ② のグラフを考える。次の問いに答えよ。
- (1) 直線①が点 $(-1, 2)$ を通るような a, b の組は何通りあるか。
 - (2) $P(-2, 8), Q(2, 16)$ とするとき、放物線②と線分 PQ が共有点を持つ c の値は何通りあるか。
 - (3) 点 $(2, 8)$ で直線①と放物線②が交わる確率を求めよ。
 - (4) 直線 $x = 2$ 上の点で直線①と放物線②が交わる確率を求めよ。
 - (5) 直線①と放物線②は、必ず $x < 0$ の部分と $x > 0$ の部分で1回ずつ交わる。 $c = 1$ のとき、直線①と放物線②の2つの交点の x 座標がともに整数となるような a, b の組は何通りあるか。

- ④ 直径5の円 O の円周上に $AB = 4$ となるように2点 A, B をとる。弧 AB のうち長い方の円弧上に動点 P をとり、線分 AP の中点を M とし、 M から線分 PB に垂線 MN を引く。次の問いに答えよ。
- (1) PA が円 O の直径となるとき、 MN の長さを求めよ。
 - (2) PB が円 O の直径となるとき、三角形 PMN の面積を求めよ。
 - (3) 点 C を BC が円 O の直径となる点と定める。
 「点 P が点 A を含まない円弧 BC 上にあるとき、
 直線 MN は点 P の位置に関わらず定点 Q を通る。ただし、点 P は点 B とは異なる点とする。」
 解答欄の図に定点 Q を図示した上で、このことを証明せよ。



- ⑤ 右図のような正四角錐 $P-ABCD$ があり、すべての辺は球面 S に接している。球面 S の中心 O は、頂点 P から底面 $ABCD$ に引いた垂線 PH 上にある。辺 PA と球面 S の接点を Q とする。
- 球面 S の半径が1、 OH の長さが $\frac{\sqrt{2}}{4}$ のとき、次の問いに答えよ。
- (1) 線分 AH の長さを求めよ。
 - (2) 線分 OA, QA の長さをそれぞれ求めよ。
 - (3) 線分 PO, PQ の長さをそれぞれ x, y とする。 x, y の値を求めよ。
 - (4) 二等辺三角形 PAB の内接円の半径 r を求めよ。



⑤ 数学

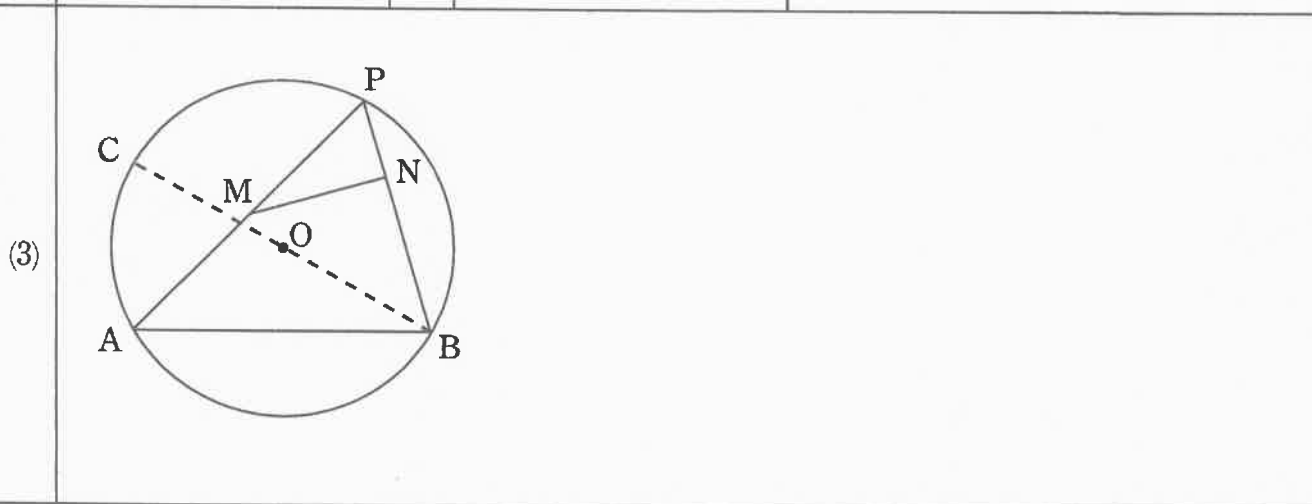
①	(1) $x =$, $y =$	(2)
	(3) $\angle BDE =$	(4) $(p, q) = ($, $)$
	(5) $(m, n) = ($, $), ($, $)$	



②	(1) $A($, $)$	(2) $p + q =$	(3) $R($, $)$
	(4) $p =$, $q =$	(5) $a =$	

③	(1) 通り	(2) 通り	(3)
	(4)	(5) 通り	

④	(1) $MN =$	(2) $\triangle PMN =$
---	------------	-----------------------



⑤	(1) $AH =$	(2) $OA =$, $QA =$
	(3) $x =$, $y =$	(4) $r =$

数 学

1 (1) $x=9, y=3$ (2) 2 (3) $\angle BDE = 65^\circ$ (4) $(p, q) = (13, 7)$ (5) $(m, n) = (4, 42), (6, 34)$

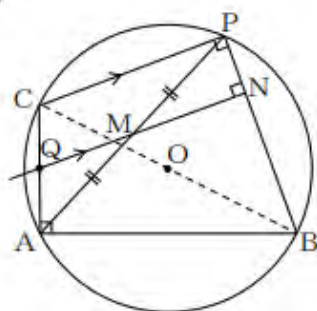
2 (1) $A(1, a)$ (2) $p+q=1$ (3) $R\left(\frac{1}{2}, 2a\right)$

(4) $p = \frac{1-\sqrt{7}}{2}, q = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$ (5) $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3 (1) 4通り (2) 5通り (3) $\frac{1}{72}$ (4) $\frac{1}{24}$ (5) 6通り

4 (1) $MN=2$ (2) $\triangle PMN = \frac{27}{50}$

(3)



ACとNMの交点をQとすると、
 $\angle CPN = 90^\circ$ (CB直径)と
 $\angle MNP = 90^\circ$ より、
 $PC \parallel NM$
 よって、 $AQ : QC = AM : MP$
 $= 1 : 1$ ゆえ
 QはACの中点、すなわち定点。

5 (1) $AH = \frac{\sqrt{7}}{2}$ (2) $OA = \frac{\sqrt{30}}{4}, QA = \frac{\sqrt{14}}{4}$

(3) $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}, y = \frac{\sqrt{14}}{2}$ (4) $r = \frac{\sqrt{7}}{4}$