

数学 問題・解答用紙 <No.1>

1 (40点)

次の をうめよ。

(1) $4x^2 - 9y^2 + 18y - 9$ を因数分解すると である。

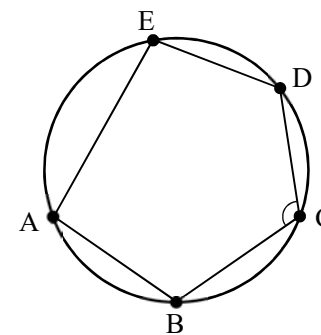
(2) 連立方程式 $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1 \\ \frac{x}{3} - \frac{3y}{5} = 2 \end{cases}$ の解は $x =$, $y =$ である。

(3) 正方形 X の 1 辺の長さを 4 大きくしてできる正方形の面積は, 正方形 X の 1 辺の長さを 1 大きくしてできる正方形の面積の 3 倍より 15 だけ小さくなる。

この正方形 X の 1 辺の長さは である。

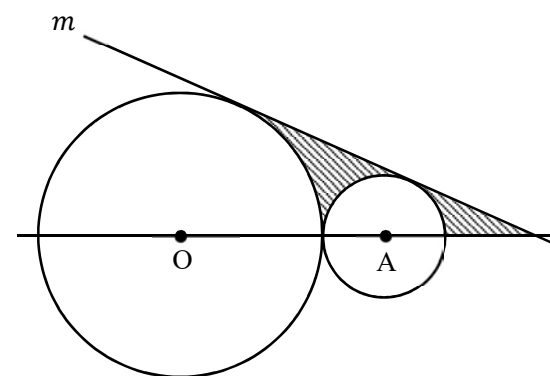
(4) $AB = BC, CD = DE$ の 5 角形 ABCDE が図のように円に内接している。

$\angle ACE = 50^\circ$ のとき, $\angle BCD =$ $^\circ$ である。



(5) 図のように, 中心が O で半径が 3 の円と中心が A で半径が 1 の円が接していて, 直線 m は 2 つの円に接している。

このとき, 図の斜線部分の面積は である。



受験 番号	<input type="text"/>	小 計	<input type="text"/>
----------	----------------------	--------	----------------------

数学 問題・解答用紙 <No.2>

2 (15点)

a を正の定数とする。 y 軸上に点 $A(0, a-2)$ がある。放物線 $y = ax^2 \dots \textcircled{1}$ と直線 $y = ax$ の交点のうち、原点 O とは異なる点を B とする。 $\triangle OAB$ が $OA = OB$ の二等辺三角形となるとき、次の問いに答えよ。

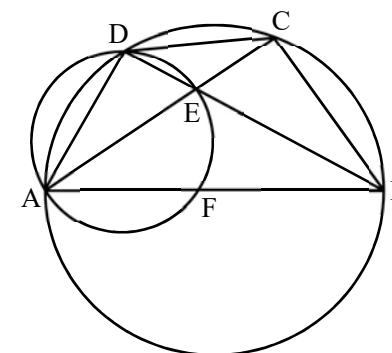
- (1) a の値を求めよ。
- (2) 直線 AB に関して原点 O と同じ側に、 $\textcircled{1}$ 上の点 C をとる。ただし、 C は原点とは異なる点とする。 $\triangle ABC$ の面積が $\triangle OAB$ の面積と等しくなるとき、 C の座標を求めよ。

(1)

(2)

3 (15点)

図のように、四角形 $ABCD$ が辺 AB を直径とする円に内接している。2つの対角線 AC, BD の交点を E とし、 $\triangle AED$ の外接円と辺 AB の交点のうち A ではない方を F とする。



次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle AFE \sim \triangle ACB$ を証明せよ。
- (2) $AB=5$ であるとき、 $AC \times AE + BD \times BE$ の値を求めよ。

(1)

(2)

受験
番号

小計

数学 問題・解答用紙 <No.3>

4 (15点)

正七角形 F について、次の問いに答えよ。

- (1) 対角線の本数を求めよ。
- (2) 頂点を結んでできる三角形のうち、F と辺を共有しないものの個数を求めよ。
- (3) 頂点以外の 1 点で 3 本の対角線が交わることはない。これをふまえて、頂点以外での対角線の交点の個数を求めよ。

(1)	
(2)	
(3)	

5 (15点)

各辺の長さが 6 で、底面を正方形 ABCD とする正四角すい O-ABCD がある。辺 AB, BC の中点をそれぞれ M, N とする。また、辺 OA 上に点 P を $OP : AP = 2 : 1$ となるようにとり、辺 OC 上に点 Q を $OQ : CQ = 2 : 1$ となるようにとる。この正四角すい O-ABCD を 3 点 P, M, N を通る平面で切ることができる切り口の図形を X とする。

次の問いに答えよ。

- (1) PQ の長さを求めよ。解答欄には答えのみを記しなさい。
- (2) 図形 X の面積を求めよ。

(1)	
(2)	

受験 番号		小 計		合 計	
------------------	--	----------------	--	----------------	--

数学 問題・解答用紙 <No.1>

1 (40点)

次の をうめよ。

(1) $4x^2 - 9y^2 + 18y - 9$ を因数分解すると である。

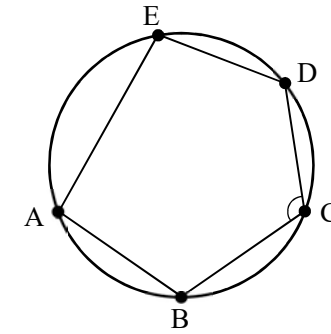
(2) 連立方程式 $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1 \\ \frac{x}{3} - \frac{3y}{5} = 2 \end{cases}$ の解は $x = \frac{15}{4}$, $y = -\frac{5}{4}$ である。

(3) 正方形 X の 1 辺の長さを 4 大きくしてできる正方形の面積は, 正方形 X の 1 辺の長さを 1 大きくしてできる正方形の面積の 3 倍より 15 だけ小さくなる。

この正方形 X の 1 辺の長さは である。

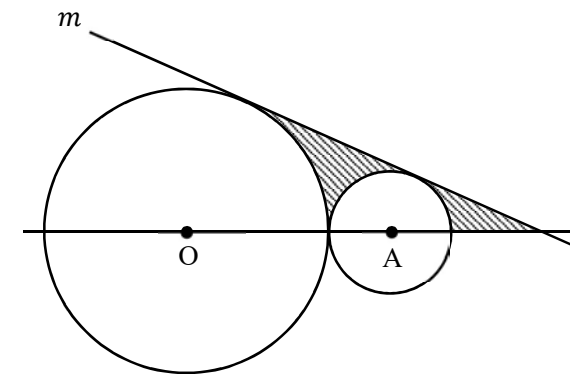
(4) $AB = BC, CD = DE$ の 5 角形 ABCDE が図のように円に内接している。

$\angle ACE = 50^\circ$ のとき, $\angle BCD = 115^\circ$ である。



(5) 図のように, 中心が O で半径が 3 の円と中心が A で半径が 1 の円が接していて, 直線 m は 2 つの円に接している。

このとき, 図の斜線部分の面積は である。



受験 番号		小 計	
----------	--	--------	--

数学 問題・解答用紙 <No.2>

2 (15点)

a を正の定数とする。y軸上に点 $A(0, a-2)$ がある。放物線 $y = ax^2 \cdots \textcircled{1}$ と直線 $y = ax$ の交点のうち、原点 O とは異なる点を B とする。 $\triangle OAB$ が $OA = OB$ の二等辺三角形となるとき、次の問いに答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
 (2) 直線 AB に関して原点 O と同じ側に、 $\textcircled{1}$ 上の点 C をとる。ただし、 C は原点とは異なる点とする。 $\triangle ABC$ の面積が $\triangle OAB$ の面積と等しくなるとき、 C の座標を求めよ。

(1) $y = ax$ を $\textcircled{1}$ に代入して

$$\begin{aligned} ax^2 &= ax \\ ax(x-1) &= 0 \\ x &= 0, 1 \end{aligned}$$

B は原点と異なるから B の x 座標は $x = 1$ 。よって、 $B(1, a)$ 。

$OA = OB$ より $OA^2 = OB^2$ だから。

$$\begin{aligned} (a-2)^2 &= 1^2 + a^2 \\ 4a &= 3 \\ a &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

これは、 $a > 0$ をみたら。

(2) O を通って AB に平行な直線を ℓ とすると、 ℓ と $\textcircled{1}$ の交点が C である。

(1) より

$$A\left(0, -\frac{5}{4}\right), B\left(1, \frac{3}{4}\right)$$

AB の傾きは 3

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{5}{4}\right) \div (1-0) = 2$$

よって、 ℓ の式は

$$y = 2x \cdots \textcircled{3}$$

また、(1) より $\textcircled{1}$ の式は

$$y = \frac{3}{4}x^2 \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}$ を $\textcircled{4}$ に代入して

$$2x = \frac{3}{4}x^2$$

$$x(3x-8) = 0$$

$$x = 0, \frac{8}{3}$$

C は原点と異なるから C の x 座標は

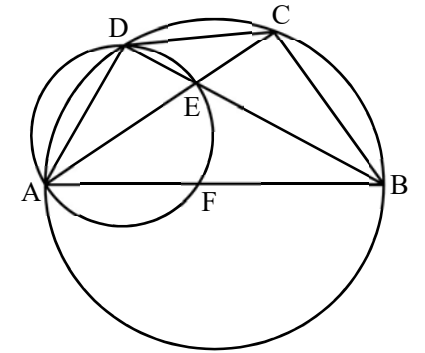
$$x = \frac{8}{3}$$

したがって、

$$C\left(\frac{8}{3}, \frac{16}{3}\right)$$

3 (15点)

図のように、四角形 $ABCD$ が辺 AB を直径とする円に内接している。2つの対角線 AC, BD の交点を E とし、 $\triangle AED$ の外接円と辺 AB の交点のうち A ではない方を F とする。



次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle AFE \sim \triangle ACB$ を証明せよ。
 (2) $AB=5$ であるとき、 $AC \times AE + BD \times BE$ の値を求めよ。

(1) $\triangle AFE$ と $\triangle ACB$ で、共通の角だから

$$\angle EAF = \angle BAC \cdots \textcircled{1}$$

一方、 AB は図の大円の直径だから

$$\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$$

よって、 $\angle ADE = 90^\circ$ だから AE は図の小円の直径である。

したがって、

$$\angle AFE = 90^\circ = \angle ACB \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より、 $\triangle AFE$ と $\triangle ACB$ は二組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AFE \sim \triangle ACB$$

(2) (1) より $\triangle AFE \sim \triangle ACB$ だから

$$AE : AB = AF : AC$$

$$AC \times AE = AB \times AF \cdots \textcircled{3}$$

$\triangle BFE$ と $\triangle BDA$ で

$$\angle BFE = \angle BDA = 90^\circ, \quad \angle EBF = \angle ABD$$

よって、二組の角がそれぞれ等しいから $\triangle BFE \sim \triangle BDA$ 。したがって、

$$BE : BA = BF : BD$$

$$BD \times BE = BA \times BF \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}, \textcircled{4}$ より

$$\begin{aligned} AC \times AE + BD \times BE &= AB \times AF + BA \times BF \\ &= AB \times (AF + BF) = AB \times AB = 5 \times 5 = 25 \end{aligned}$$

受験
番号

小
計

数学 問題・解答用紙 <No.3>

4 (15点)

正七角形 F について、次の問いに答えよ。

- (1) 対角線の本数を求めよ。
- (2) 頂点を結んでできる三角形のうち、F と辺を共有しないものの個数を求めよ。
- (3) 頂点以外の 1 点で 3 本の対角線が交わることはない。これをふまえて、頂点以外での対角線の交点の個数を求めよ。

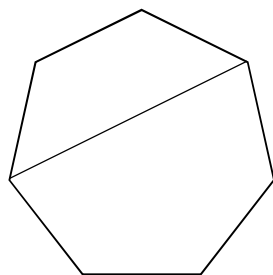
(1) 頂点 2 個に対して対角線か辺が 1 本定まる。

7 個の頂点から 2 個の頂点を選ぶ選び方は

$$\frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21 \text{ 通り}$$

このうち、F の辺となるものが 7 通りあるから、対角線は

$$21 - 7 = 14 \text{ 本}$$



(2) 頂点 3 個に対して三角形が 1 個定まる。

7 個の頂点から 3 個の頂点を選ぶ選び方は

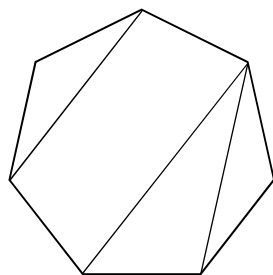
$$\frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35 \text{ 通り}$$

このうち、F と 2 辺を共有するものが 7 通りあり、

1 辺のみを共有するものは辺ごとに 3 通りずつある。

よって、条件をみたす三角形は

$$35 - 7 - 3 \times 7 = 7 \text{ 個}$$



(3)

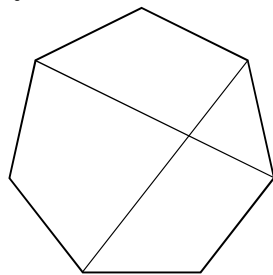
3 本の対角線が頂点以外の 1 点で交わることはないから、頂点以外で交わる 2 本の対角線 1 組に対して、対角線の交点が 1 個定まる。

また、頂点 4 個に対して、交わる対角線 2 本が 1 組定まる。

7 個の頂点から 4 個の頂点を選ぶ選び方は

$$\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 35 \text{ 通り}$$

よって、対角線の交点は 35 個



5 (15点)

各辺の長さが 6 で、底面を正方形 ABCD とする正四角すい O-ABCD がある。辺 AB, BC の中点をそれぞれ M, N とする。また、辺 OA 上に点 P を $OP : AP = 2 : 1$ となるようにとり、辺 OC 上に点 Q を $OQ : CQ = 2 : 1$ となるようにとり。この正四角すい O-ABCD を 3 点 P, M, N を通る平面で切ることができる切り口の図形を X とする。次の問いに答えよ。

- (1) PQ の長さを求めよ。解答欄には答えのみを記しなさい。
- (2) 図形 X の面積を求めよ。

(1) $PQ = 4\sqrt{2}$ (AC は 1 辺が 6 の正方形の対角線だから、 $AC = 6\sqrt{2}$
 $OP : PA = OQ : QC = 2 : 1$ より $AC // PQ$ で $PQ = 4\sqrt{2}$)

(2) P, M, N を通る平面と辺 OD との交点を R とする。X は五角形 RPQNM である。PQ の中点を S, MN の中点を T とし、O から底面に下した垂線の足を H とする。H は BD の中点、T は BH の中点、S は OH と RT の交点になる。BD に平行で S を通る直線と OD の交点を U とする。

$$DH : US = OH : OS = OA : OP = 3 : 2$$

$$RT : RS = DT : US = \frac{3}{2}DH : US = 9 : 4$$

$$RS : ST = 4 : 5$$

$BD = 6\sqrt{2}$ だから、各部分の長さは

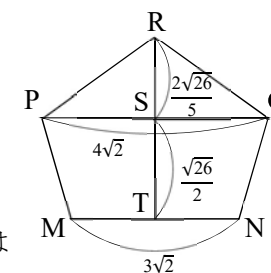
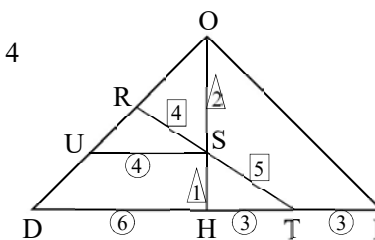
$$OH = BH = 3\sqrt{2}, \quad MN = 3\sqrt{2}$$

$$SH = \frac{1}{3}OH = \sqrt{2}, \quad TH = \frac{1}{2}BH = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$ST = \sqrt{2 + \frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{26}}{2}, \quad RS = \frac{4}{5}ST = \frac{2\sqrt{26}}{5}$$

三角形 RPQ と台形 MNQP に分けて考えると、X の面積は

$$4\sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{26}}{5} \times \frac{1}{2} + (3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{26}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{51}{10}\sqrt{13}$$



受験
番号

小
計

合
計