

令和3年度 東大寺学園高等学校入学試験問題

数 学

— 60分 — (高校数学・3枚のうち1)

※問題を解く際に必要ならば以下の事実を用いてよい。
 3つの内角の大きさが $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ である直角二等辺三角形の3辺の長さの比は $1:1:\sqrt{2}$ であり、3つの内角の大きさが $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ である直角三角形の3辺の長さの比は $1:\sqrt{3}:2$ である。

1 次の問いに答えよ (解答欄には答のみ記入せよ)。

- (1) $x = \sqrt{6} + \sqrt{5} - 1, y = \sqrt{6} - \sqrt{5} + 1$ のとき、 $2x^2 + 2y^2 + 7xy - 3x + 3y$ の値を求めよ。
- (2) $(3a + 2c)(3a - 2c) - b(b - 4c) - (6a - 1)$ を因数分解せよ。
- (3) x の1次方程式 $\sqrt{15}x - 2\sqrt{3} = 0$ の解が、 a を定数とする x の2次方程式 $\sqrt{5}x^2 + ax + 4\sqrt{5} = 0$ の1つの解であるとする。この2次方程式のもう1つの解を p とするとき、 a の値と p の値を求めよ。
- (4) 袋の中に、数字が書かれた6枚のカード $\boxed{1} \boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{4} \boxed{5}$ が入っている。この袋の中から同時に2枚のカードを取り出す。このとき、取り出したカードに書かれた数字の和が素数になる確率を求めよ。

2 次の問いに答えよ。

- (1) 図1のように、自然数を小さい順に並べる。
 - ① 2021 は上から何段目の左から何番目にあるか。
 - ② 上から n 段目の中央の数を n を用いて表せ。ただし、 n は自然数とする。
- (2) 図2のように、正の奇数を小さい順に並べる。上から n 段目の中央の数を n を用いて表せ。ただし、 n は自然数とする。

図1

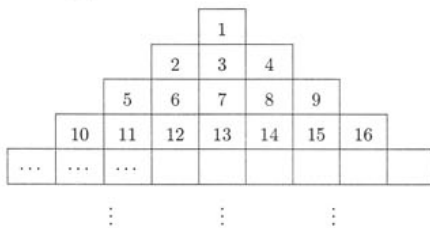
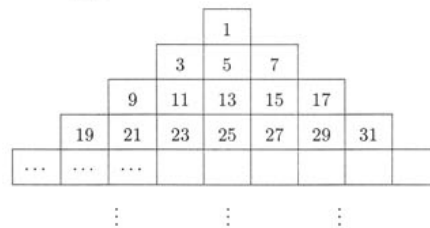
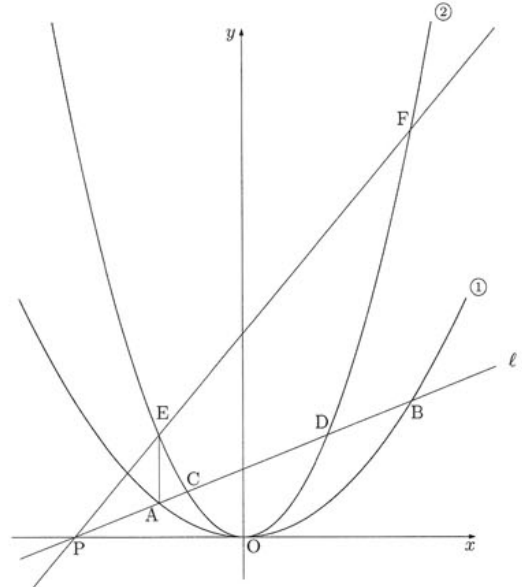


図2



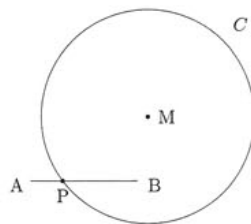
3 図のように、2つの放物線 $y = ax^2 \dots \textcircled{1}$, $y = bx^2 \dots \textcircled{2}$ と直線 ℓ があり、 ℓ は $\textcircled{1}$ と2点 A, B で、 $\textcircled{2}$ と2点 C, D で交わっている。ただし、 $0 < a < b$ とする。A, B, C の x 座標はそれぞれ $-2, 4, -\frac{4}{3}$ である。 ℓ と x 軸との交点を P とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) P の x 座標を求めよ。
- (2) $\frac{b}{a}$ の値を求めよ。
- (3) A を通り y 軸に平行な直線と $\textcircled{2}$ の交点を E とし、直線 PE と $\textcircled{2}$ の2つの交点のうち E でない方を F とする。このとき、F の x 座標を求めよ。
- (4) 四角形 ABFE の面積を S とし、四角形 CDFE の面積を T とするとき、 S と T の比 $S:T$ を求めよ。



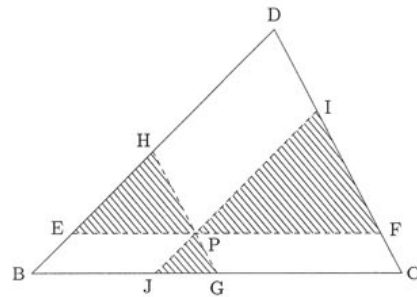
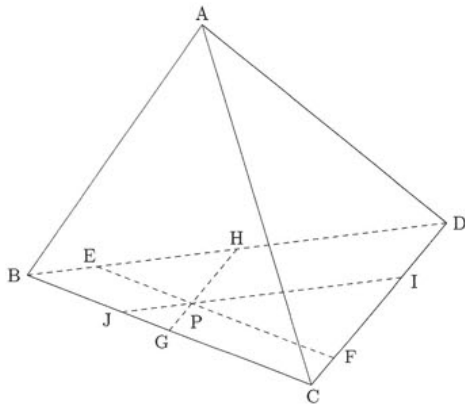
4 図のように、平面上に長さが1の線分 AB と、半径が1で中心を M とする円 C、および線分 AB 上の点 P がある。この平面上で円 C の周が点 P を通るように円 C を動かすとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 P が (1) の解答欄の図の位置にあるとき、点 M が動いてできる図形を、定規、コンパスの両方またはいずれか一方を用いて作図せよ。
- (2) 点 P が線分 AB 上を A から B まで動くとき、(1) の図形が通過する部分の面積を求めよ。



5 体積が1である四面体 $ABCD$ の面 BCD の内部に点 P をとる. P を通り辺 BC に平行な直線と辺 DB , DC との交点をそれぞれ E , F とし, P を通り辺 CD に平行な直線と辺 BC , BD との交点をそれぞれ G , H とし, P を通り辺 DB に平行な直線と辺 CD , CB との交点をそれぞれ I , J とする. 三角形 PJG の面積 S , 三角形 PFI の面積 T , 三角形 PHE の面積 U の比が, $S:T:U = 1:9:4$ であるとき, 次の問いに答えよ.

- (1) P を通り面 ABC に平行な平面で四面体 $ABCD$ を切断したときにできる立体のうち, 頂点 A を含む立体の体積を求めよ.
- (2) P を通り面 ABC に平行な平面と, P を通り面 ABD に平行な平面で四面体 $ABCD$ を切断したときにできる立体のうち, 頂点 A を含む立体の体積を求めよ.
- (3) P を通り面 ABC に平行な平面と, P を通り面 ABD に平行な平面と, P を通り面 ACD に平行な平面で四面体 $ABCD$ を切断したときにできる立体のうち, 頂点 A を含む立体の体積を求めよ.



東大寺学園高校 解答

1 (1) 54 (2) $(3a + b - 2c - 1)(3a - b + 2c - 1)$

(3) $a = -12$, $p = 2\sqrt{5}$ (4) $\frac{8}{15}$

2 (1) ① 上から 45 段目の左から 85 番目 ② $n^2 - n + 1$

(2) $2n^2 - 2n + 1$

3 (1) -4 (2) 3 (3) 4 (4) $S : T = 45 : 32$

4 (1) 右図の赤線
点 P を中心とする半径 1 の円

(2) $\frac{\pi}{3} + 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

5 (1) $\frac{91}{216}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{6}$

