受験番号

2023 年度　大阪星光学院高等学校　入学試験問題

数　学

（その１）

次の $\boxed{\quad}$ の中に正しい答えを入れなさい．

【１】　(1) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})=$ $\boxed{\quad}$

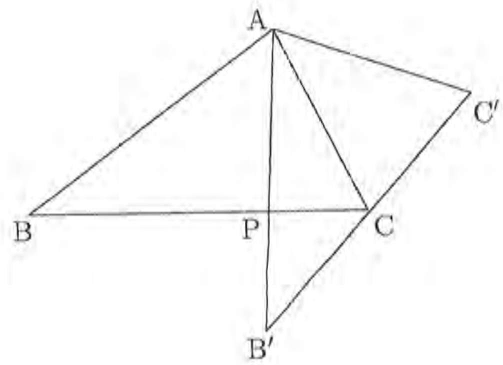
(2)　a, b を正の数とする．x と y の連立方程式 $\begin{cases} ax-y=4 \\ x+by=7 \end{cases}$ の解を a と b を用いて表すと，

$x=$ $\boxed{\quad}$, $y=$ $\boxed{\quad}$ である．

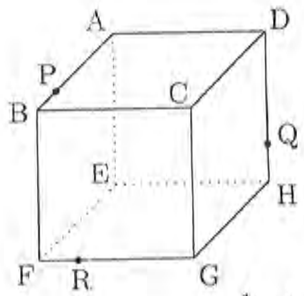
(3)　1 から 5 までの整数が 1 つずつ書かれた 5 枚のカードがある．この中から 3 枚を選んで横一列に並べて 3 桁の整数をつくるとき，この整数が偶数となる確率は $\boxed{\quad}$ であり，3 の倍数となる確率は $\boxed{\quad}$ である．

(4)　$AB=10$, $BC=11$ の三角形 ABC を，点 A を中心に回転させたものを三角形 $AB'C'$ としたところ，右の図のように 3 点 B', C, C' が一直線上になった．また，BC と AB' の交点を P とするとき，$BP=8$, $AP>PB'$ となった．このとき，AP の長さは $\boxed{\quad}$ で，

三角形 ACC' の面積は $\boxed{\quad}$ である．



(5)　右の図において，ABCD-EFGH は 1 辺の長さが 4 の立方体で，$AP=3$, $FR=1$ であり，Q は辺 DH 上を自由に動く点である．この立方体の内部を通る経路で，P から Q を通って R に至るもののうち，最短の長さは $\boxed{\quad}$ である．



【２】　右の図のように，放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 $y=-2x-\frac{3}{2}$ が 2 点 A, B で交わっている．放物線上に点 $C(t,\ \frac{1}{2}t^2)$（ただし $t>0$）をとって，平行四辺形 ABCD をつくったところ，辺 AD の中点 E が放物線上にあった．

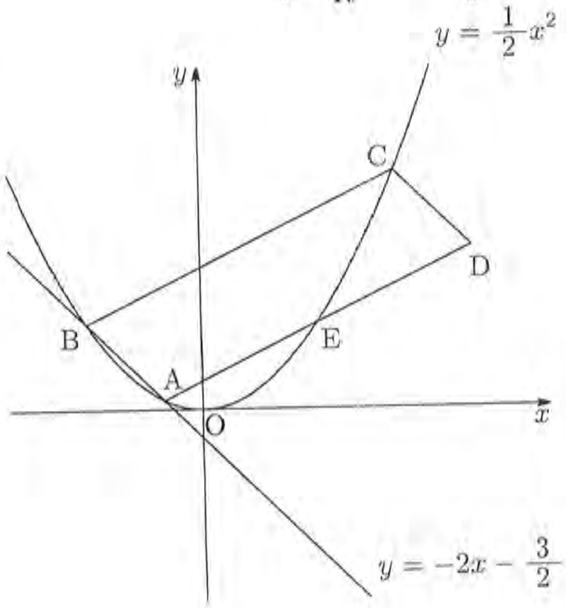
(1)　点 A の x 座標は $\boxed{\quad}$ ，点 B の x 座標は $\boxed{\quad}$ である．

(2)　点 E の x 座標を t で表すと $\boxed{\quad}$ となり，したがって

$t=$ $\boxed{\quad}$ となる．

(3)　原点 O を通り，平行四辺形 ABCD の面積を二等分する直線の式は

$y=$ $\boxed{\quad}$ である．



数　学

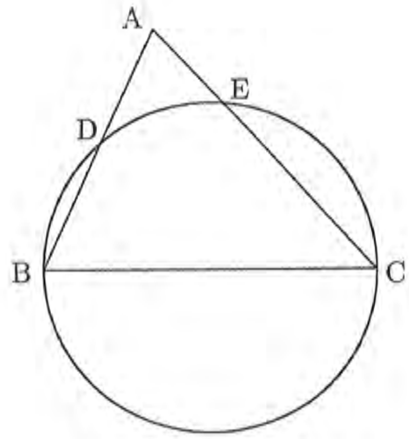
【3】 0 以上の整数 x に対して，x を 3 で割った余りを $f(x)$ と表すこととする．たとえば，$f(11)=2$，$f(24)=0$ である．

（1） $f(1024)=$ $\boxed{}$ ，$f(1024\times1025)=$ $\boxed{}$ である．

（2） $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2023)=$ $\boxed{}$ である．

（3） $f(f(2023^2)\times f(71))+f(2023)\times f(71^2)=$ $\boxed{}$ である．

【4】 右の図のように，三角形 ABC があり，辺 BC を直径とする円と 2 点 D, E で交わっている．$AB=4$，$BC=4\sqrt{3}$ で，点 D は辺 AB の中点である．



（1） 三角形 ABC と三角形 AED は相似であることを証明せよ．

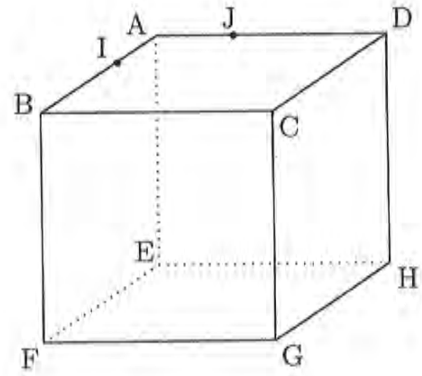
(証明)

（2） 三角形 AED は二等辺三角形であることを証明せよ．

(証明)

（3） AE の長さは $\boxed{}$ であり，三角形 AED の面積は $\boxed{}$ である．

【5】 右の図において，ABCD-EFGH は 1 辺の長さが 6 の立方体で，$AI=AJ=2$ である．



（1） 3 点 I, J, F を通る平面でこの立方体を切ったとき，点 A を含む方の立体の体積は $\boxed{}$ であり，切り口の面積は $\boxed{}$ である．

（2） 点 E からこの切り口の平面に下ろした垂線の長さは $\boxed{}$ である．

数　学

次の□の中に正しい答えを入れなさい．

【１】 (1) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}) =$ $\boxed{24}$

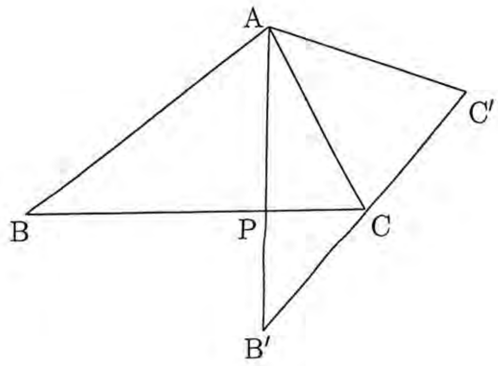
(2) a, b を正の数とする．x と y の連立方程式 $\begin{cases} ax - y = 4 \\ x + by = 7 \end{cases}$ の解を a と b を用いて表すと，

$x = \boxed{\dfrac{4b+7}{ab+1}}$, $y = \boxed{\dfrac{7a-4}{ab+1}}$ である．

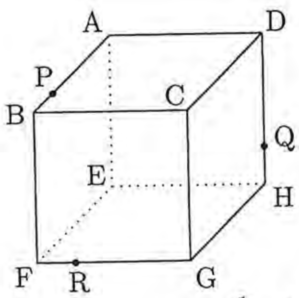
(3) 1から5までの整数が1つずつ書かれた5枚のカードがある．この中から3枚を選んで横一列に並べて3桁の整数をつくるとき，この整数が偶数となる確率は $\boxed{\dfrac{2}{5}}$ であり，3の倍数となる確率は $\boxed{\dfrac{2}{5}}$ である．

(4) AB = 10, BC = 11 の三角形 ABC を，点 A を中心に回転させたものを三角形 AB′C′ としたところ，右の図のように3点 B′, C, C′ が一直線上になった．また，BC と AB′ の交点を P とするとき，BP = 8, AP > PB′ となった．このとき，AP の長さは $\boxed{6}$ で，

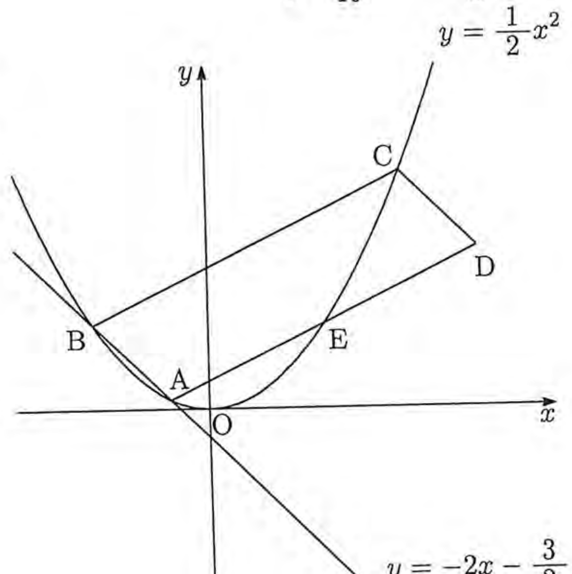
三角形 ACC′ の面積は $\boxed{18}$ である．



(5) 右の図において，ABCD-EFGH は1辺の長さが4の立方体で，AP = 3, FR = 1 であり，Q は辺 DH 上を自由に動く点である．この立方体の内部を通る経路で，P から Q を通って R に至るもののうち，最短の長さは $\boxed{2\sqrt{29}}$ である．



【２】 右の図のように，放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ と直線 $y = -2x - \frac{3}{2}$ が2点 A, B で交わっている．放物線上に点 C$(t,\ \frac{1}{2}t^2)$ (ただし $t > 0$) をとって，平行四辺形 ABCD をつくったところ，辺 AD の中点 E が放物線上にあった．



(1) 点 A の x 座標は $\boxed{-1}$，点 B の x 座標は $\boxed{-3}$ である．

(2) 点 E の x 座標を t で表すと $\boxed{\dfrac{t+1}{2}}$ となり，したがって

(t-2)

$t = \boxed{5}$ となる．

(3) 原点 O を通り，平行四辺形 ABCD の面積を二等分する直線の式は

$y = \boxed{\dfrac{13}{4}x}$ である．

受験番号

2023 年度　大阪星光学院高等学校　入学試験問題

数　学

（その２）

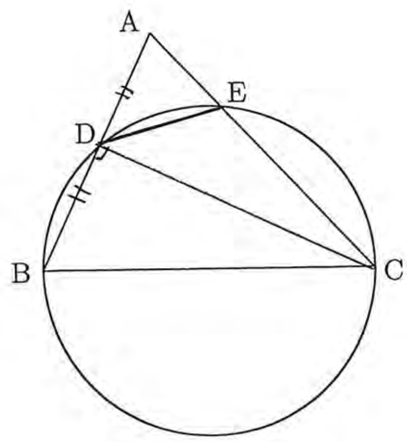
【３】 0 以上の整数 x に対して，x を 3 で割った余りを $f(x)$ と表すこととする．たとえば，$f(11)=2$, $f(24)=0$ である．

（１） $f(1024)=$ $\boxed{1}$, $f(1024\times 1025)=$ $\boxed{2}$ である．

（２） $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2023)=$ $\boxed{2023}$ である．

（３） $f(f(2023^2)\times f(71))+f(2023)\times f(71^2)=$ $\boxed{3}$ である．

【４】 右の図のように，三角形 ABC があり，辺 BC を直径とする円と 2 点 D, E で交わっている．$AB=4$, $BC=4\sqrt{3}$ で，点 D は辺 AB の中点である．



（１） 三角形 ABC と三角形 AED は相似であることを証明せよ．

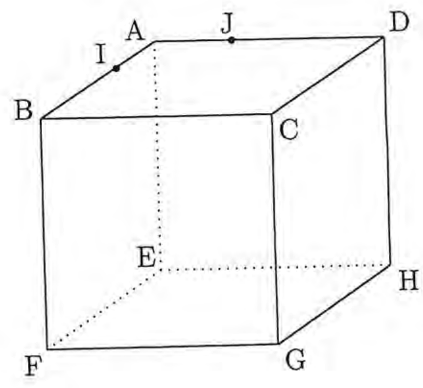
(証明) △ABCと△AEDにおいて
四角形DBCEは円に内接しているので，
∠ABC＝∠AED
また ∠A共通より
2組の角がそれぞれ等しいので
△ABC ∽ △AED

（２） 三角形 AED は二等辺三角形であることを証明せよ．

(証明) 仮定より AD=DB
BCは直径より∠CDB=90°
よってCDは線分ABの垂直二等分線より
△ABCはCA=CBの二等辺三角形
また(1)より△ABC∽△AEDより
△AEDはDA=DEの二等辺三角形

（３） AE の長さは $\boxed{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$ であり，三角形 AED の面積は $\boxed{\dfrac{\sqrt{11}}{3}}$ である．

【５】 右の図において，ABCD-EFGH は 1 辺の長さが 6 の立方体で，$AI=AJ=2$ である．



（１） 3 点 I, J, F を通る平面でこの立方体を切ったとき，点 A を含む方の立体の体積は $\boxed{52}$ であり，切り口の面積は $\boxed{8\sqrt{22}}$ である．

（２） 点 E からこの切り口の平面に下ろした垂線の長さは $\boxed{\dfrac{9\sqrt{22}}{11}}$ である．