

数 学

注 意

- 1 問題は **1** から **4** までで、7 ページにわたって印刷してあります。
また、解答用紙は両面に印刷してあります。
- 2 検査時間は 50 分で、終わりは午前 11 時 00 分です。
- 3 声を出して読むではいけません。
- 4 答えは全て解答用紙に HB 又は B の鉛筆（シャープペンシルも可）を使って明確に記入し、解答用紙だけを提出しなさい。
- 5 答えに根号が含まれるときは、根号を付けたまま、分母に根号を含まない形で表しなさい。また、根号の中を最も小さい自然数にしなさい。
- 6 答えは解答用紙の決められた欄からはみ出さないように書きなさい。
- 7 答えを直すときは、きれいに消してから、消しくずを残さないようにして、新しい答えを書きなさい。
- 8 受検番号を解答用紙の表面と裏面の決められた欄に書き、表面については、その数字の ○ の中を正確に塗りつぶしなさい。
- 9 解答用紙は、汚したり、折り曲げたりしてはいけません。

1 次の各問に答えよ。

〔問1〕 $\frac{27}{\sqrt{3}} \div \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^3 + 9\left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{9}\right)^2$ を計算せよ。

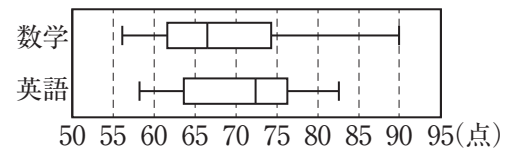
〔問2〕 2次方程式 $2\pi x(x+1) = (\pi x - \pi)(6x+2)$ を解け。
ただし、 π は円周率である。

〔問3〕 1から6までの目の出る大小1つずつのさいころを同時に1回投げる。
大きいさいころの出た目の数を a 、小さいさいころの出た目の数を b とするとき、 $\frac{b}{2a}$ が整数となる確率を求めよ。
ただし、大小2つのさいころはともに、1から6までのどの目が出ることも同様に確からしいものとする。

〔問4〕 右の図1は、40人が受けた数学と英語それぞれのテストの得点を箱ひげ図に表したものである。図1から読み取れることとして正しく説明しているものを、次のア～エのうちから2つ選び、記号で答えよ。

- ア 85点以上の生徒は、数学にはいるが、英語にはいない。
- イ 70点以上の生徒は、数学、英語ともに20人よりも多い。
- ウ 80点以上85点以下の生徒は、数学、英語ともに必ずいる。
- エ 数学の得点の高い方から20番目の生徒の数学の得点は、英語の得点が低い方から10番目の生徒の英語の得点より高い。

図1



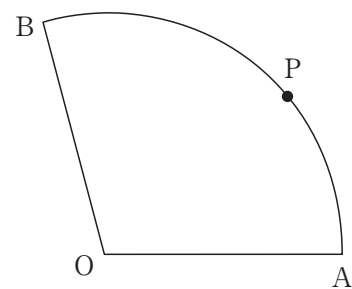
〔問5〕 右の図2で、点Pは、線分OAを半径とするおうぎ形OABの \widehat{AB} 上にある点である。

点Pにおけるおうぎ形OABの接線を l とした場合を考える。

解答欄に示した図をもとにして、点Pで直線 l に接し、線分OAにも接する円を、定規とコンパスを用いて作図によって求めよ。

ただし、作図に用いた線は消さないでおくこと。

図2



2 右の図1で、点Oは原点、曲線fは

関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ、曲線gは

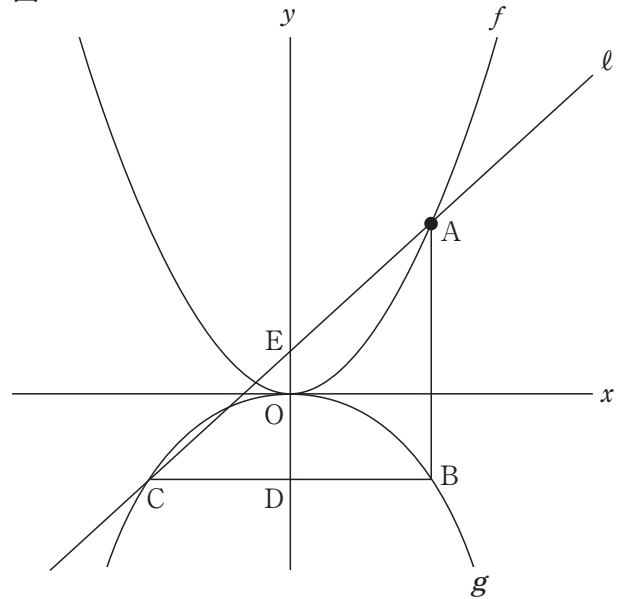
関数 $y = -\frac{1}{4}x^2$ のグラフを表している。

曲線f上にありx座標が t ($t > 0$) である点をA、点Aを通りy軸に平行な直線を引き、曲線gとの交点をB、点Bを通りx軸に平行な直線を引き、曲線gとの交点をCとする。

線分BCとy軸との交点をD、2点A、Cを通る直線を ℓ 、直線 ℓ とy軸との交点をEとする。

点Oから点(1, 0)までの距離および点Oから点(0, 1)までの距離をそれぞれ1 cmとして、次の各問に答えよ。

図1



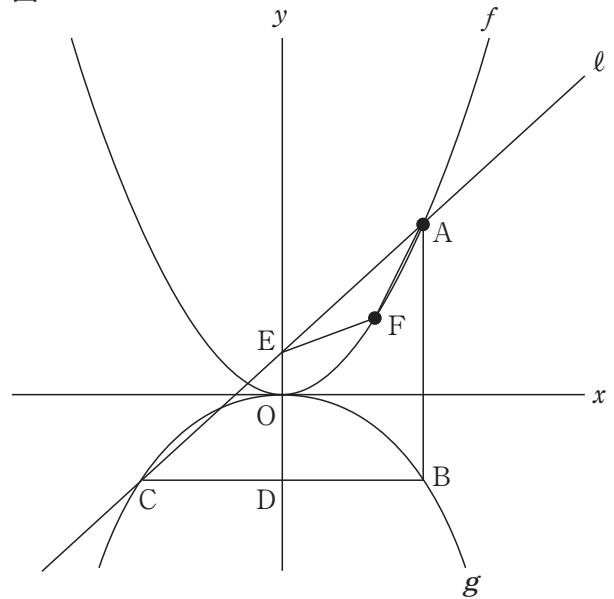
[問1] $AB = 3$ cm のとき、直線 ℓ の式を求めよ。

[問2] 右の図2は、図1において、直線 ℓ の傾きが1のとき、曲線 f 上にあり x 座標が2である点を F とし、点 A と点 F 、点 E と点 F をそれぞれ結んだ場合を表している。

$\triangle AEF$ の面積は何 cm^2 か。

ただし、答えだけでなく、答えを求める過程が分かるように、途中の式や計算なども書け。

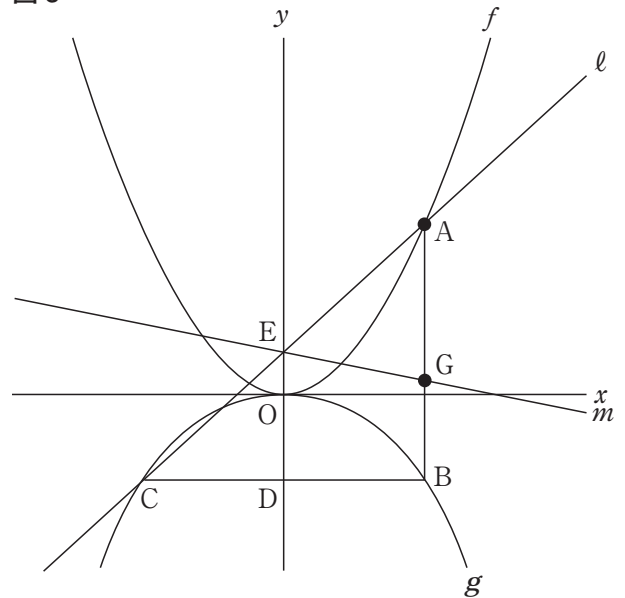
図2



[問3] 右の図3は、図1において、線分 AB 上にあり、点 A と一致しない点を G 、2点 E, G を通る直線を m とした場合を表している。

直線 m が四角形 $AEDB$ の面積を2等分するとき、 $AG : GB$ を最も簡単な整数の比で表せ。

図3

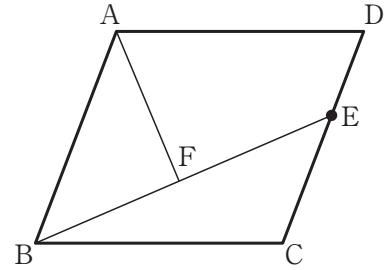


3 右の図1で、四角形 ABCD は平行四辺形である。

辺 CD 上にある点を E とし、頂点 B と点 E を結ぶ。頂点 A から線分 BE に垂直な直線を引き、線分 BE との交点を F とする。

次の各問に答えよ。

図1

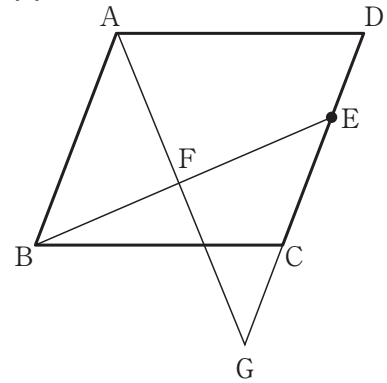


〔問1〕 右の図2は、図1において、線分 AF を F の方向に延ばした直線と、辺 CD を C の方向に延ばした直線との交点を G とした場合を表している。

次の(1), (2)に答えよ。

(1) $CE : ED = 3 : 2$, $CD = CG$ のとき, $BF : FE$ を最も簡単な整数の比で表せ。

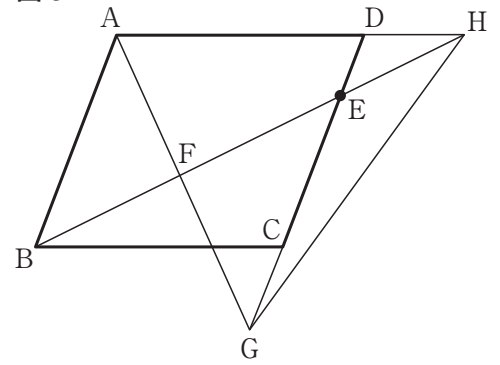
図2



(2) 右の図3は、図2において、線分BEをEの方向に延ばした直線と、辺ADをDの方向に延ばした直線との交点をHとし、点Gと点Hを結んだ場合を表している。

BF = FE のとき、 $\triangle HAF \equiv \triangle HGF$ であることを証明せよ。

図3

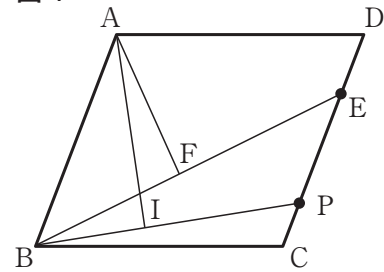


[問2] 右の図4は、図1において、線分CE上にある点をPとし、頂点Bと点Pを結び、頂点Aから線分BPに垂直な直線を引き、線分BPとの交点をIとした場合を表している。

AB = 4 cm, $\angle EBC = 20^\circ$, 点Pが線分CE上を頂点Cから点Eまで動き、点Eで止まるとき、点Iが動いてできる曲線の長さは何cmか。

ただし、円周率は π とする。

図4



4

高校生のNさんは、夏休みに母校の中学校で数学の学習補助のボランティア活動に参加した。

Nさんは、そこで中学生の太郎さんがノートに次のような計算をしているのを見つけた。Nさんは間違っているところに×を書いた。

太郎さんのノート

$$\text{ア } \sqrt{9 + \frac{2}{5}} = \sqrt{3^2 + \frac{2}{5}} \quad \text{1行目}$$

$$= 3\sqrt{\frac{2}{5}} \quad \times \quad \text{2行目}$$

$$\text{イ } \sqrt{4 + \frac{4}{3}} = \sqrt{2^2 + \frac{4}{3}} \quad \text{3行目}$$

$$= 2\sqrt{\frac{4}{3}} \quad \text{4行目}$$

太郎さんは、 $\sqrt{a^2 + b}$ が $a\sqrt{b}$ になると勘違いしており、そのためアの計算には間違ったところがある。Nさんは、太郎さんが同様の勘違いでイの計算を行ったと考え、太郎さんのノートの4行目のところで×を付けようと思ったが、正しく計算した答えと同じになるため×を付けることができなかった。Nさんは、 a が正の整数、 b が正の数するとき、太郎さんのノートの3行目から4行目の計算のように $\sqrt{a^2 + b} = a\sqrt{b}$ となる例が他にもないか調べてみたところ、Nさんは、 $a=10$ のとき、 $b=$ 〔あ〕となるのを見つけた。

〔問1〕 〔あ〕に当てはまる値を求めよ。

次に、Nさんは中学生の花子さんがノートに次のような式の展開をしているのを見つけた。Nさんは、間違っているところに×を書いた。

花子さんのノート

$$\text{ウ } (x+5)^2 - (x+4)(x+2) = (x^2+5^2) - (x^2+4 \times 2) \quad \times \quad \text{1行目}$$

$$= 25 - 8 \quad \text{2行目}$$

$$= 17 \quad \text{3行目}$$

$$\text{エ } (x+7)^2 - (x+10)(x+4) = (x^2+7^2) - (x^2+10 \times 4) \quad \text{4行目}$$

$$= 49 - 40 \quad \text{5行目}$$

$$= 9 \quad \text{6行目}$$

花子さんは、 x, y がどんな値でも、 $(x+y)^2$ が x^2+y^2 に、 $(x+c)(x+d)$ が x^2+cd になると勘違いしており、そのためウの式の展開には間違ったところがある。Nさんは、花子さんが同様の勘違いでエの式の展開を行ったと考え、花子さんのノートの4行目のところで×を付けようと思ったが、×を付けることができなかった。Nさんは、花子さんの勘違いによる式の展開と、正しく式の展開をしたときの結果が同じになるときは、どんな場合か興味をもった。

e, f, g を自然数として $f > g, x \neq 0$ とすると、Nさんは、 $(x+e)^2 - (x+f)(x+g)$ を花子さんの勘違いによる方法で展開したときと、正しく展開したときの結果が同じになるときは、 $(x+e)^2 - (x+f)(x+g) = A$ としたとき、 \sqrt{A} が必ず自然数になることに気が付いた。

[問2] 上記の下線部が正しい理由を、文字 x, e, f, g, A を用いて説明せよ。

ただし、説明の過程が分かるように、途中の式や考え方なども書け。

なお、2つの数 X, Y について、【表】で示される関係が成り立ち、オ～ケには偶数か奇数のどちらかが入る。説明するときに【表】のオ～ケに偶数か奇数を正しく当てはめた結果については、証明せずに用いてよい。

【表】

	X, Y ともに偶数	X, Y ともに奇数	X, Y どちらかが偶数でもう一方が奇数
$X+Y$	偶数	オ	カ
$X-Y$	キ	ク	ケ

Nさんは、誤った計算方法でも正しい答えが出てくる場合について、他にどのような例があるか調べたところ、 h を1以上9以下の整数、 i, j をそれぞれ0以上9以下の整数としたとき、 $(h+i+j)^3 = 100h + 10i + j$ となる場合があることが分かった。

そこでNさんは、 k を1以上9以下の整数、 l, m, n をそれぞれ0以上9以下の整数として、 $(k+l+m+n)^4$ の値が k, l, m, n を左から順に並べた4桁の数と等しくなる場合があるか考え、そのような k, l, m, n の組を見付けることができた。

[問3] Nさんが見付けた k, l, m, n について、 $\sqrt{1000k+100l+10m+n}$ の値を求めよ。

解答用紙 数学

マーク・解答上の注意事項

- 1 受検番号欄は、HB又はBの鉛筆（シャープペンシルも可）を使って、○の中を正確に塗りつぶすこと。
- 2 記入した内容を直すときは、きれいに消して、消しくずを残さないこと。
- 3 決められた欄以外にマークしたり、記入したりしないこと。

良い例	悪い例		
	線	小さい	はみ出し
	丸囲み	レ点	うすい

受 検 番 号						
○	○	○	○	○	○	○
①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

1

〔問1〕	
〔問2〕	
〔問3〕	
〔問4〕	
〔問5〕	

2

〔問1〕	
〔問2〕	【 途中の式や計算など 】
〔問3〕	<div style="border: 1px dashed black; padding: 10px; margin-bottom: 10px;"> (答え) cm² </div> AG : GB = :

解答用紙 数学

受 検 番 号					

3		
〔問1〕	(1)	BF : FE = :
〔問1〕	(2)	【 証 明 】
〔問2〕	cm	

4	
〔問1〕	
〔問2〕	【 途中の式や考え方など 】
〔問3〕	

正答表

1		点
(問1)	$\frac{7}{3}$	5
(問2)	$x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$	5
(問3)	$\frac{5}{36}$	5
(問4)	ア、エ	5
(問5)		5

数 学

2		点
(問1)	$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$	7
(問2)	【途中の式や計算など】	10

$A(t, \frac{t^2}{2}), B(t, -\frac{t^2}{4}), C(-t, -\frac{t^2}{4})$ である。
 直線 ℓ の傾きが1だから、 $AB=BC$ である。
 ゆえに、 $\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{4} = t + t$
 $t(\frac{3}{4}t - 2) = 0$
 $t > 0$ より $t = \frac{8}{3}$ となる。
 したがって、 $A(\frac{8}{3}, \frac{32}{9})$ となる。
 $E(0, a)$ とおくと、直線 ℓ の傾きが1だから、
 直線 ℓ の式は、 $y = x + a$ となる。
 直線 ℓ が、点 $A(\frac{8}{3}, \frac{32}{9})$ を通るから、 $\frac{32}{9} = \frac{8}{3} + a$
 ゆえに、 $a = \frac{8}{9}$ したがって、点 $E(0, \frac{8}{9})$ である。
 また、点 $R(2, 2)$ となり、直線 OF の傾きも1より、
 $\ell \parallel OF$ だから、 $\triangle AEF$ の面積は $\triangle AEO$ の面積と等しい。
 $\triangle AEO$ の面積は、 $\frac{1}{2} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{3} = \frac{32}{27} \text{cm}^2$

(答え) $\frac{32}{27} \text{cm}^2$

(問3)	$AG : GB = 3 : 1$	8
------	-------------------	---

3

3		点
(問1)	(1) $BF : FE = 5 : 8$	7
(問1)	(2) 【証明】	10

$\triangle ABF$ と $\triangle GEF$ において。
 仮定より、 $BF=EF$ …… ①
 対頂角は等しいから、 $\angle AFB = \angle GFE$ …… ②
 四角形 $ABCD$ は平行四辺形だから、 $AB \parallel DC$
 よって、 $AB \parallel EG$
 平行線の錯角は等しいから
 $\angle ABF = \angle GEF$ …… ③
 ①, ②, ③ より、
 1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから、
 $\triangle ABF \cong \triangle GEF$ …… ④
 次に、 $\triangle HAF$ と $\triangle HGF$ において、
 HF は共通 …… ⑤
 $AF \perp BE$ だから、 $\angle AFH = \angle GFH = 90^\circ$ …… ⑥
 ④ より、合同な三角形の対応する辺は等しいから、
 $AF=GF$ …… ⑦
 ⑤, ⑥, ⑦ より、
 2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから、
 $\triangle HAF \cong \triangle HGF$

(問2)	$\frac{4}{9}\pi \text{cm}$	8
------	----------------------------	---

4

4		点
(問1)	$\frac{100}{99}$	7
(問2)	【途中の式や考え方など】	10

$(x+e)^2 - (x+f)(x+g) = (x^2 + 2ex + e^2) - (x^2 + gx + fx + fg)$
 $= (2e - f - g)x + (e^2 - fg)$
 花 f さんの計算で正しい答えが出てくるときには、 $x \neq 0$ だから、
 $2e - f - g = 0$ …… ①
 このとき、 $(x+e)^2 - (x+f)(x+g) = e^2 - fg$
 となる。また、①より、 $e = \frac{f+g}{2}$
 これを、 $e^2 - fg$ に代入すると
 $e^2 - fg = (\frac{f+g}{2})^2 - fg$
 $= \frac{f^2 + 2fg + g^2 - 4fg}{4}$
 $= \frac{f^2 - 2fg + g^2}{4}$
 $= (\frac{f-g}{2})^2$
 $f > g$ より、 $f-g$ は正の数である。
 したがって、 $\sqrt{A} = \sqrt{(\frac{f-g}{2})^2} = \frac{f-g}{2}$
 また、①から、 $2e = f+g$ となり、 e は自然数より $2e$ が偶数だから、
 $f+g$ は偶数である。
 ゆえに、【表】の結果を用いて、 f と g はともに偶数か、
 ともに奇数のいずれかである。
 f と g がともに偶数のときは $f-g$ は偶数となり、
 f と g がともに奇数のときは $f-g$ は偶数となる。
 したがって、 $f-g$ は2の倍数であるから $\frac{f-g}{2}$ は自然数となる。

(問3)	49	8
------	----	---