$\boxed{1}$ 以下の [A], [B] に答えよ。

[A] 座標平面上に放物線 $C: y=x^2$ と直線 $\ell: y=-4x+5$ がある。図のように，$x$ 軸の正の部分に点 W と点 X，放物線 $C$ 上に点 Y，直線 $\ell$ 上に点 Z を取り，四角形 WXYZ が正方形になるようにする。点 X の座標を $(t,0)$ とおく。

(1) $t$ を用いて点 Z の座標を表せ。なお，1つ答えればよい。

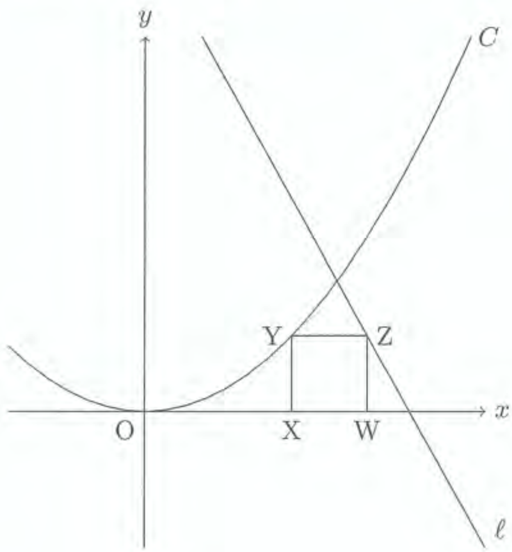
(2) $t$ が満たす 2 次方程式を

$$\boxed{（ア）}\,t^2+\boxed{（イ）}\,t-\boxed{（ウ）}=0$$

と表したとき，空欄（ア），（イ），（ウ）にあてはまる正の整数を答えよ。

(3) 点 Z の座標を求めよ。

なお，下記の図は必ずしも正確なものではない。

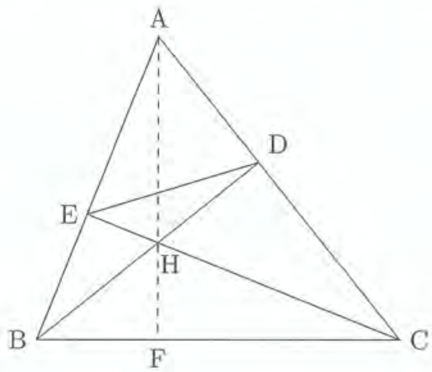



問題 [B] は 6 ページにある。

[B] 鋭角三角形に対して，3 つの頂点からそれぞれの対辺に垂線を下ろすと，3 本の垂線が 1 点で交わることが知られている。（この点は三角形の「垂心」と呼ばれる。）以下，3 本の垂線が 1 点で交わることを証明しよう。

**証明**

鋭角三角形 ABC において，点 B から直線 AC へ下ろした垂線が直線 AC と交わる点を D，点 C から直線 AB へ下ろした垂線が直線 AB と交わる点を E とする。$\triangle$ABC が鋭角三角形であることから，D, E はそれぞれ辺 AC，辺 AB 上にあるので，線分 BD, CE の交点 H は $\triangle$ABC の内部にある。よって直線 AH と直線 BC の交点を F とすると，F は辺 BC 上にある。これより，下図のようになる。




図において，$\angle DBC = \angle CAH$ を証明する。

$\angle BDC = \angle BEC = 90^\circ$ だから，線分 BC を直径とする円は点 D, 点 E を通る。よって 4 点 B, C, D, E は同一円周上にあるから，弧 $\boxed{（ア）}$ に円周角の定理を用いて $\boxed{（イ）}$ …① がいえる。

また $\angle ADH = \angle AEH = 90^\circ$ より，線分 AH を直径とする円は点 D, E を通る。よって 4 点 A, E, H, D は同一円周上にあるから，弧 $\boxed{（ウ）}$ に円周角の定理を用いて $\boxed{（エ）}$ …② がいえる。

以上の①，②と図より，$\angle DBC = \angle CAH$ …③ である。

次に $\angle AFB = 90^\circ$ であることを証明する。

| |
|---|
| （オ） |

点 A から直線 BC に下ろした垂線はただ 1 つなので，直線 AF は点 A から直線 BC へ下ろした垂線と一致する。よって，鋭角三角形の各頂点から対辺へ下ろした 3 本の垂線が 1 点で交わることが示された。

(1) 空欄（ア），（イ），（ウ），（エ）に適切な弧の名称または等式を補え。

(2) 空欄（オ）にあてはまる，$\angle AFB = 90^\circ$ であることの証明を書け。

**2** 3 桁の自然数（100 以上 999 以下の整数）が「拡張 4 の倍数」であることを，次の通り定める。

拡張 4 の倍数…… 4 の倍数であるか，または各位の数字をうまく並び替えると 3 桁である 4 の倍数にできる数

たとえば 251 は，各位の数字を入れ替えて 152 とすれば 4 の倍数になるので，拡張 4 の倍数である。

以下，拡張 4 の倍数の個数を求める。各位の 3 つの数字の組合せにおける偶数の個数に着目し，場合分けして数えよう。なお，各問いとも答えのみ記せばよい。

(1) 拡張 4 の倍数のうち，各位の 3 つの数字の組合せが「偶数 1 つと奇数 2 つ」の場合を考える。
 (i) 各位の数字の組合せが「6 と奇数 2 つ」である拡張 4 の倍数は何個あるか。
 (ii) このような組合せで現れる偶数の数字は，6 とあと 1 つしかない。6 でない方を答えよ。

(2) 拡張 4 の倍数のうち，各位の 3 つの数字の組合せが「偶数 2 つと奇数 1 つ」の場合を考える。たとえば，各位の数字が「5 と偶数 2 つ」の組合せであるものを数える。
 (i) 5 が百の位にあるものは何個あるか。
 (ii) 5 が十の位にあるものは何個あるか。
 (iii) 5 が一の位にあるものは何個あるか。

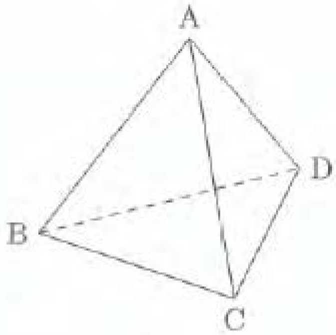
(3) 拡張 4 の倍数のうち，各位の 3 つの数字の組合せが「偶数 3 つ」の場合を数えたい。そのために，まず各位の数字がいずれも偶数である 3 桁の自然数すべての個数を数え，そこから拡張 4 の倍数でないものの個数を引き算する。
 (i) すべての位の数字が偶数である 3 桁の自然数は何個あるか。
 (ii) すべての位の数字が偶数である 3 桁の自然数のうち，拡張 4 の倍数でないものの例を 3 つ挙げよ。
 (iii) すべての位の数字が偶数である拡張 4 の倍数は何個あるか。

(4) 拡張 4 の倍数は全部で何個あるか。

なお参考のため，3 桁の 4 の倍数に現れる下 2 桁の一覧表を下記に記す。一の位が 0, 4, 8 のグループと 2, 6 のグループとで分けて並べている。

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 04 | 08 | 12 | 16 |
| 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 40 | 44 | 48 | 52 | 56 |
| 60 | 64 | 68 | 72 | 76 |
| 80 | 84 | 88 | 92 | 96 |

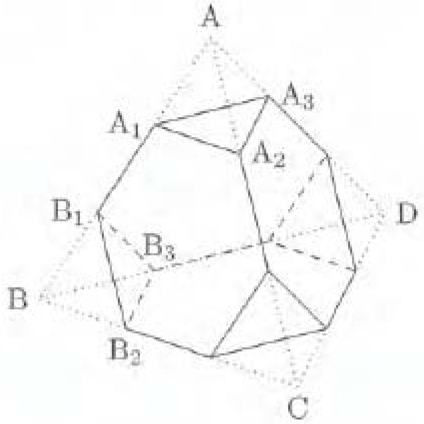
## 3 1辺の長さが6の正四面体 ABCD を考える。

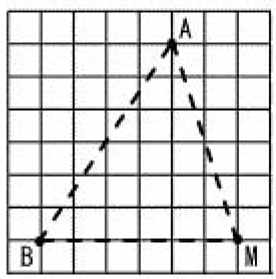



辺 CD の中点を M とし，点 A から平面 BCD に下ろした垂線が平面 BCD と交わる点を G とする。また正四面体 ABCD の4つの頂点を通る球 $S_1$ の中心を O とする。このとき3点 B, G, M はこの順で一直線上にあり，さらに BG : GM = 2 : 1 である。

(1) 点 O は線分 AG 上にある。線分 AO の長さ，すなわち球 $S_1$ の半径を求めよ。なお，答えのみ記せばよい。

次に，正四面体 ABCD の4つの頂点から，下図のように1辺の長さが2の正四面体を切り落としてできる立体 $T$ を考える。頂点 A を含む正四面体を切り落としたときに新しくできる正三角形の面を $\triangle A_1A_2A_3$，頂点 B を含む正四面体を切り落としたときに新しくできる正三角形の面を $\triangle B_1B_2B_3$ とする。ただし $A_1$ と $B_1$ は，下図のように正四面体の辺 AB 上にとる。




この立体 $T$ の12個すべての頂点を通る球 $S_2$ が存在する。その半径を求めよう。

(2) 平面 ABM による立体 $T$ の断面の形をかけ。また，同じ図に点 O，点 G をかき込め。

(3) 平面 $A_1A_2A_3$ に点 O から下ろした垂線が平面 $A_1A_2A_3$ と交わる点を H とする。OH の長さを求めよ。

(4) 点 O を中心とし，立体 $T$ の12個すべての頂点を通る球 $S_2$ の半径を求めよ。

# 開成高等学校 2024 年入試 数学解答

$\boxed{1}$

[A]

(1) 例：Z$(t^2+t,\ t^2)$

(2)(ア) 5　(イ) 4　(ウ) 5

(3) Z$\left(\dfrac{23+\sqrt{29}}{25},\ \dfrac{33-4\sqrt{29}}{25}\right)$

[B]

(1) (ア) ＣＤ　(イ) ∠ＤＢＣ＝∠ＤＥＣ　(ウ) ＤＨ　(エ) ∠ＤＥＨ＝∠ＤＡＨ

(2) 例：③より，∠ＤＢＦ＝∠ＤＡＦ となるので，4 点Ａ，Ｂ，Ｆ，Ｄは同一円周上にある。
よって，∠ＡＦＢ＝∠ＡＤＢ＝90°

$\boxed{2}$

(1)(ⅰ) 75 個　(ⅱ) 2

(2)(ⅰ) 25 個　(ⅱ) 20 個　(ⅲ) 20 個

(3)(ⅰ) 100 個　(ⅱ) 例：222，226，266　(ⅲ) 92 個

(4) 567 個

$\boxed{3}$

(1) $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

(2) 右図

(3) $\dfrac{5\sqrt{6}}{6}$

(4) $\dfrac{\sqrt{22}}{2}$